KOMPLEKS VEKSELSTRØMSTEORI

AMTSGYMNASIET · SØNDERBORG ·

Valgfrit emne
Matematik
3yzF 1985-86

1: INDLEDNING

Caspar Wessel (1745-1818) var lillebror til digteren Johan Herman Wessel. De blev begge født i Norge, som på den tid var underlagt det dansk-norske riges enevoldige Styre med hovedstad i København. Hele Europa var da inde i en voldsom kulturel udvikling med nytænkning inden for næsten alle områder: teater, litteratur, malerkunst, kemi, fysik og matematik. Det var i denne periode, at Galvani, Volta og Ørsted gjorde deres store opdagelser angående elektriciteten og dens natur. Caspar Wessel var landmåler og matematiker. Han skrev en lille afhandling, som hed „Om Directionens analytiske Betegning". Og dermed var de komplekse tal skabt! Det følgende illustrerer blot én af de utallige anvendelser af Caspar Wessels „opfindelse".

2. REELLE VEKSELSPÆNDINGER OG -STRØMME

En reel vekselspænding er en elektrisk spænding, der varierer med tiden efter en forskrift af formen

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi),$$

hvor $u(t)$ er vekselspændingens værdi til tidspunktet t. Tallene U, ω og φ er reelle, og $U \geqq 0$ og $\omega > 0$. Enheden for $u(t)$ er volt, og tiden måles i sekunder.

Vekselspændingen er periodisk med en periode T, der er bestemt ved:

$$\omega(t+T)+\varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$
$$\Updownarrow$$
$$T = 2\pi/\omega$$

En periode varer altså $2\pi/\omega$ sekunder. Antallet af perioder pr. sekund er derfor $\omega/2\pi$. Dette tal kaldes vekselspændingens frekvens, f, og enheden er sec^{-1} = Hertz = Hz:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

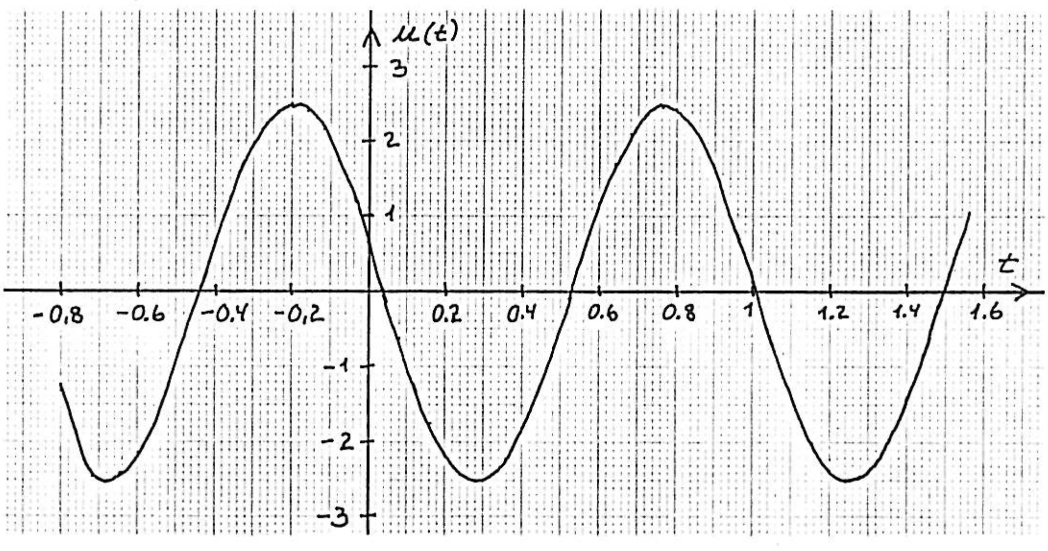
Tallet ω, som er proportionalt med frekvensen, kaldes <u>vinkelfrekvensen</u>:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

I løbet af en periode gennemløber $u(t)$ alle værdier mellem $-U$ og U. Tallet U kaldes vekselspændingens <u>amplitude</u>. Den angives ligesom $u(t)$ i enheden volt:

$$U = \max_{t \in R} |u(t)|$$

Vinklen $\omega t + \varphi$ kaldes vekselspændingens <u>øjeblikkelige fase</u>. For $t = 0$ har denne vinkel værdien φ, som derfor kaldes vekselspændingens <u>begyndelsesfase</u>. Såvel den øjeblikkelige fase som begyndelsesfasen angives i radianer.



Øvelse 1. På foregående side er skitseret grafen for en reel vekselspænding. Angiv periode, frekvens, vinkelfrekvens, amplitude og begyndelsesfase for denne vekselspænding.

Øvelse 2. Omskriv hver af vekselspændingerne

$$u_1(t) = 3\sin(200\pi t)$$
$$u_2(t) = -\cos(50\pi t)$$
$$u_3(t) = 3\cos(100\pi t) + 4\sin(100\pi t)$$

til formen

$$u(t) = U\cos(2\pi f t + \varphi),$$

hvor $U \geq 0$ og $f > 0$.

Øvelse 3. Find et udtryk for den vekselspænding, man kan finde i en europæisk stikkontakt.

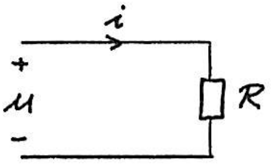
En <u>reel vekselström</u> er en elektrisk strøm, der varierer med tiden efter en forskrift af formen

$$i(t) = I\cos(\omega t+\varphi),$$

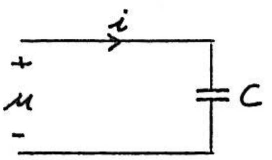
hvor $i(t)$ er vekselstrømmens værdi til tiden t. Tallene I, ω og φ er reelle, og $I \geqq 0$ og $\omega > 0$. På samme måde som tilfældet var med vekselspænding, kan man definere en reel vekselstrøms periode, frekvens, vinkelfrekvens, amplitude, fase og begyndelsesfase. Den eneste forskel er, at $i(t)$ og I angives i enheden ampere.

3. MODSTANDE, KONDENSATORER OG SPOLER i REELLE VEKSELSTRØMSKREDSLØB.

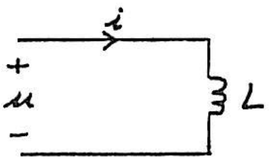
Modstande, kondensatorer og spoler udgør de grundlæggende komponenter i passive (ɔ: uden forstærkning) elektroniske vekselstrømskredsløb. Fra ellæren kendes følgende relationer mellem spænding og strøm:



$u = R \cdot i$ (Ohms lov)



$$i = C \frac{du}{dt}$$

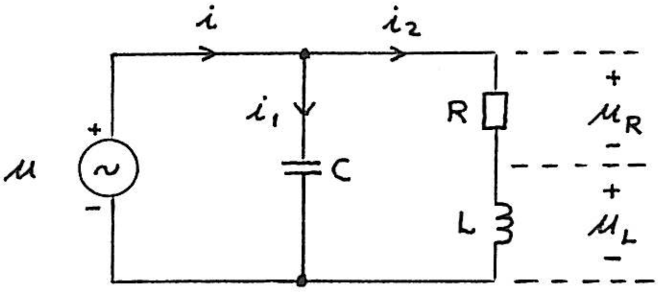


$$u = L \frac{di}{dt}$$

Disse relationer gælder uafhængigt af kurveformerne for de benyttede spændinger og strømme. Altså gælder de også for reelle vekselspændinger og -strømme. Af samme grund gælder Kirchhoffs to love.

På dette grundlag er man i princippet i stand til at analysere alle elektroniske vekselstrømskredsløb, som er opbygget af modstande, kondensatorer og spoler. Men i praksis løber man let ind i nogle næsten uoverkommelige problemer.

Eksempel 1. Betragt diagrammet:



Idet vi antager, at u er en kendt vekselspænding:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi) ,$$

vil vi forsøge at finde et udtryk for strømmen, i.
Da spændingen over kondensatoren er u, og da strømmen igennem den er i_1, har vi:

$$i_1 = C \frac{du}{dt}.$$

Altså er, ifølge Kirchhoffs 1. lov:

$$i_2 = i - i_1 = i - C \frac{du}{dt}.$$

Denne strøm, i_2, løber gennem modstanden. Derfor er spændingen over modstanden givet ved:

$$u_R = R \cdot i_2$$

Men i_2 løber også gennem spolen, således at vi har:

$$u_L = L \cdot \frac{di_2}{dt}.$$

Ifølge Kirchhoffs 2. lov gælder:

$$u = u_R + u_L$$
$$\Downarrow\; u = R i_2 + L \frac{di_2}{dt}$$
$$\Downarrow\; u = R\left(i - C\frac{du}{dt}\right) + L \frac{d}{dt}\left(i - C\frac{du}{dt}\right)$$
$$\Downarrow\; u = R \cdot i - RC\frac{du}{dt} + L\frac{di}{dt} - LC\frac{d^2u}{dt^2}$$

Hermed har vi fundet den differentialligning, der beskriver relationen mellem den kendte spænding, u, og den ukendte strøm, i.

Denne ligning er ikke særlig let at håndtere, og vi skal da heller ikke gøre noget forsøg på at løse den. Vi kan blot konstatere, at når et elektronisk kredsløb indeholder kondensatorer eller spoler, så vil en reel vekselstrømsanalyse føre til en differentialligning, som kan være vanskelig eller endog umulig at løse analytisk. Det nævnte problem opstår ikke, såfremt kredsløbet kun indeholder modstande, thi ohms lov involverer ingen differentialkvotienter.

I resten af disse noter skal vi se, hvorledes komplekse vekselspændinger og komplekse vekselstrømme gør det muligt at udvide ohms lov til også at omfatte spoler og kondensatorer.

4. KOMPLEKSE VEKSELSPÆNDINGER OG -STRØMME.

I ellæren er der en gammel tradition for at lade bogstavet „i" betegne en strøm. Dette kolliderer imidlertid med traditionen fra de komplekse tal, hvor „i" betegner den imaginære enhed. For at undgå misforståelser har man i elektroniklitteraturen udviklet den praksis, at lade „j" betegne den imaginære enhed. Denne praksis vil blive fulgt i disse noter:

> Den imaginære enhed betegnes med j.

Når vi skriver en reel vekselspænding på formen

$$v(t) = U\cos(\omega t + \varphi),$$

hvor $U \geqq 0$ og $\omega > 0$, har vi et matematisk udtryk for den virkelige fysiske spænding.

Imidlertid kan man forestille sig, at u er fremkommet som realdelen af en tilsvarende kompleks vekselspænding:

$$u(t) = U\cos(\omega t+\varphi) + jU\sin(\omega t+\varphi).$$

Denne komplekse vekselspænding eksisterer kun i menneskets fantasi og er kun indirekte et udtryk for et fysisk fænomen. Alligevel har det vist sig at være meget hensigtsmæssigt at regne med vekselspændinger på kompleks form. Hvis vi på et tidspunkt vil tilbage til realiteternes verden, kan vi blot bevare realdelen og droppe den imaginære del af den komplekse vekselspænding.

Inden den endelige definition på en kompleks vekselspænding skal vi lige reducere udtrykket for u:

$$\begin{aligned} u(t) &= U\cos(\omega t+\varphi) + jU\sin(\omega t+\varphi) \\ &= U(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)) \\ &= U e^{j(\omega t+\varphi)} \end{aligned}$$

Altså definerer vi, at en kompleks vekselspænding er en kompleks størrelse, der varierer med tiden efter en forskrift af formen:

$$u(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)},$$

hvor tallene U, ω og φ er reelle, og $U \geqq 0$ og $\omega > 0$.

Ligesom tilfældet var med reelle vekselspændinger, kan vi tale om en kompleks vekselspændings periode, frekvens, vinkelfrekvens, amplitude, fase og begyndelsesfase. Alle disse størrelser er reelle tal, som angives i de samme enheder som hidtil.

Øvelse 4. Bevis, at modulus af en kompleks vekselspænding er uafhængig af tiden. Hvilken sammenhæng er der mellem vekselspændingens modulus og dens amplitude?

Øvelse 5. Hvilken sammenhæng er der imellem en kompleks vekselspændings argument og dens øjeblikkelige fase?

Øvelse 6. Betragt vekselspændingen

$$u(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Når t gennemløber mængden af reelle tal, vil $u(t)$ beskrive en bane i den komplekse talplan. Giv en beskrivelse af denne bane.

Eksempel 2. Vi skal reducere udtrykket for den komplekse vekselspænding:

$$u(t) = 4e^{j(700t+2)} + 5e^{j(700t+3)}.$$

Ved anvendelse af egenskaberne ved eksponentialfunktionen fås:

$$\begin{aligned} u(t) &= 4e^{j700t}e^{j2} + 5e^{j700t}e^{j3} \\ &= \left(4e^{j2} + 5e^{j3}\right)e^{j700t} \end{aligned}$$

Tallet i parentesen er en kompleks

konstant, som vi vil kalde k:

$$k = 4e^{j2} + 5e^{j3}$$
$$= 4(\cos 2 + j\sin 2) + 5(\cos 3 + j\sin 3)$$
$$= (4\cos 2 + 5\cos 3) + j(4\sin 2 + 5\sin 3)$$
$$\simeq -6{,}615 + j\,4{,}343$$

På sædvanlig måde findes modulus og argument for k:

$$|k| \simeq 7{,}913 \wedge \arg(k) \simeq 2{,}561$$
$$\Downarrow$$
$$k \simeq 7{,}913\, e^{j2{,}561}$$

Når dette indsættes i udtrykket for u fås:

$$u(t) \simeq 7{,}913\, e^{j2{,}561}\, e^{j700t}$$
$$\Downarrow$$
$$u(t) \simeq 7{,}913\, e^{j(700t + 2{,}561)}$$

Altså er u en kompleks vekselspænding med amplituden 7,913 volt og med vinkelfrekvensen 700 sec^{-1}. Begyndelsesfasen ses at være 2,561 radianer.

Øvelse 7. Hvilken frekvens har den vekselspænding, der er omtalt i ovenstående eksempel?

Øvelse 8. Gør, ved hjælp af eksempel 2, rede for, at:

$$4\cos(700t+2)+5\cos(700t+3)$$
$$\simeq 7{,}913\cos(700t+2{,}561).$$

Overvej, hvorledes du ville bære dig ad med at opnå dette resultat uden anvendelse af komplekse tal.

Øvelse 9. Reducér vekselspændingen

$$u(t) = (9+2j)e^{j(100\pi t+1{,}5)},$$

således at man direkte kan se dens amplitude, frekvens og begyndelsesfase.

Øvelse 10. Hvilken amplitude har vekselspændingen

$$u(t) = e^{5{,}740+j(314{,}2t+0{,}7)}\quad ?$$

Øvelse 11. Bevis, at hvis u er en kompleks vekselspænding, og hvis k er et konstant komplekst tal, så er k·u også en kompleks vekselspænding.

Øvelse 12. Bevis, at hvis u og v er komplekse vekselspændinger med ens frekvens, så er u+v en kompleks vekselspænding med den samme frekvens.

Øvelse 13. Bevis, at hvis u og v er komplekse vekselspændinger med samme frekvens, og hvis amplituden af v er forskellig fra nul, så er forholdet mellem u og v konstant. Undersøg, om det samme gør sig gældende for reelle vekselspændinger.

Til slut i dette afsnit skal vi definere en kompleks vekselstrøm:

En kompleks vekselstrøm er en kompleks størrelse, der varierer med tiden efter en forskrift af formen

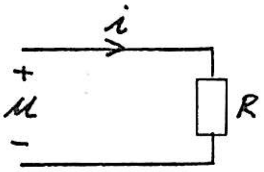
$$i(t) = I\, e^{j(\omega t + \varphi)},$$

hvor tallene I, ω og φ er reelle, og hvor $I \geqq 0$ og $\omega > 0$.

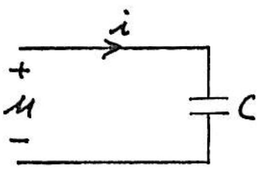
Såvel den komplekse øjebliksværdi, $i(t)$, som amplituden, I, angives i enheden ampere. Ellers gælder de samme bemærkninger for vekselstrømme som for vekselspændinger.

5: MODSTANDE, KONDENSATORER OG SPOLER i KOMPLEKSE VEKSELSTRØMSKREDSLØB.

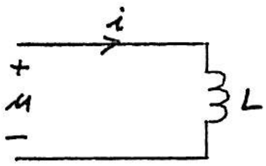
I afsnit 3 omtalte vi de grundlæggende relationer for modstande, kondensatorer og spoler:



$$u = R \cdot i \quad \text{(Ohms lov)}$$



$$i = C\frac{du}{dt}$$

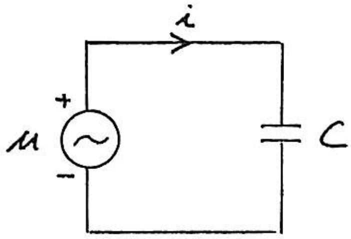


$$u = L\frac{di}{dt}$$

Disse relationer er som nævnt gyldige for reelle vekselspændinger og -strømme.

Om de også er gyldige for komplekse vekselspændinger og -strømme afhænger alene af, om de fører til de samme resultater, når man anvender dem på henholdsvis reelle og komplekse vekselspændinger og -strømme.

lad os begynde med at se på et kredslöb, der kun indeholder en kondensator:



Vi vil gå ud fra, at u er en kendt vekselspænding med amplitude U, vinkelfrekvens ω og begyndelsesfase φ. Vi skal nu udregne strömmen på to forskellige måder.

Först opfatter vi u som en <u>reel</u> vekselspænding. I dette tilfælde er vi sikre på, at relationen for en kondensator gælder. Derfor får vi:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C \frac{du}{dt} \\
&= C \frac{d}{dt}\left(U\cos(\omega t+\varphi)\right) \\
&= -\omega C U \sin(\omega t+\varphi) \\
&= \omega C U \cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Heraf ses, at strømmen har amplituden ωCU, vinkelfrekvensen ω og begyndelsesfasen $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Dernæst opfatter vi u som en kompleks vekselspænding, og vi vil antage, at relationen for en kondensator også gælder i dette tilfælde. Så får vi:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C \frac{du}{dt} \\
&= C \frac{d}{dt} \left(U e^{j(\omega t + \varphi)} \right) \\
&= j \omega C U e^{j(\omega t + \varphi)} \\
&= e^{j\frac{\pi}{2}} \omega C U e^{j(\omega t + \varphi)} \\
&= \omega C U e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}
\end{aligned}
$$

Heraf ses igen, at strømmen har amplituden ωCU, vinkelfrekvensen ω og begyndelsesfasen $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Vi har hermed konstateret, at relationen for en kondensator fører til det rigtige resultat, selvom spændingen og strømmen opfattes som komplekse signaler.

På tilsvarende måde kan man kontrollere, at relationerne for modstande og spoler også fører til rigtige resultater, selvom vekselspændingerne og -strømmene opfattes som komplekse signaler.

Vi har derfor lov til at anvende de tre grundlæggende relationer i forbindelse med analyse af komplekse vekselstrømskredsløb. Læg mærke til, at dette ikke kan efterprøves ved noget fysisk eksperiment, thi komplekse vekselspændinger og komplekse vekselstrømme eksisterer kun som idéer.

Det er let at bevise, at Kirchhoffs første og anden lov også fører til rigtige resultater, selvom de involverede vekselspændinger og vekselstrømme betragtes som komplekse signaler. Derfor kan vi uden problemer udvide disse to love til også at omfatte komplekse vekselspændinger og -strømme. Igen er der tale om et rent matematisk anliggende, der *ikke* kan efterpröves ved fysiske eksperimenter.

Vi vil nu bevise, at når man regner med komplekse vekselstrømme og -spændinger, så kan relationerne

$$i = C\,\frac{du}{dt} \qquad \text{og} \qquad u = L\,\frac{di}{dt}\,,$$

for henholdsvis en kondensator og en spole, bringes på samme form som ohms love:

$$u = R\,i.$$

Först ser vi på en kondensator med en kapacitans på C farad. Hvis vekselspændingen over kondensatoren er

$$u(t) = U\,e^{j(\omega t+\varphi)}$$

så er strømmen igennem den bestemt af:

$$i(t) = C\,\frac{du}{dt}$$
$$= C\,\frac{d}{dt}\left(U e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$
$$= j\omega C U e^{j(\omega t+\varphi)}$$
$$= j\omega C \cdot u(t)$$

Heraf fås den søgte relation for en kondensator:

$$u(t) = \frac{1}{j\omega C}\cdot i(t)$$

Bemærk, at der i denne relation ikke optræder nogen differentialkvotient, og at relationen har samme form som ohms lov.

Dernæst undersøger vi en spole med induktansen L henry. Hvis strømmen gennem spolen er

$$i(t) = I\,e^{j(\omega t+\varphi)},$$

så er spændingen over den bestemt af:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= L\,\frac{di}{dt} \\
&= L\,\frac{d}{dt}\left(I e^{j(\omega t+\varphi)}\right) \\
&= j\omega L I e^{j(\omega t+\varphi)} \\
&= j\omega L \cdot i(t)
\end{aligned}
$$

Den søgte sammenhang mellem strøm og spænding i en spole er altså:

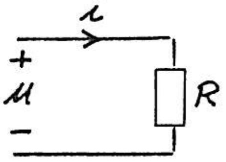
$$u(t) = j\omega L \cdot i(t).$$

Igen er det tale om en relation, som ikke indeholder differentialkvotienter, og som har samme form som ohms lov.

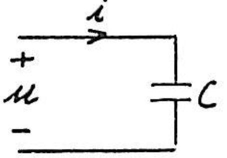
Alle tre relationer udtrykker altså, at hvadenten der er tale om en modstand, en kondensator eller en spole, så er spændingen proportional med den tilsvarende strøm. Proportionalitetsfaktoren kan være reel eller imaginær, og den kan afhænge af frekvensen eller være uafhængig af denne.

Resultaterne fra dette afsnit kan sammenfattes således:

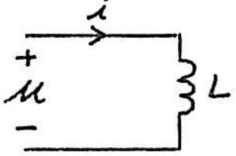
For komplekse vekselspændinger og -strømme med vinkelfrekvensen ω gælder følgende relationer:



$$\begin{cases} u = Z_R \cdot i \\ Z_R = R \end{cases}$$



$$\begin{cases} u = Z_C \cdot i \\ Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} \end{cases}$$



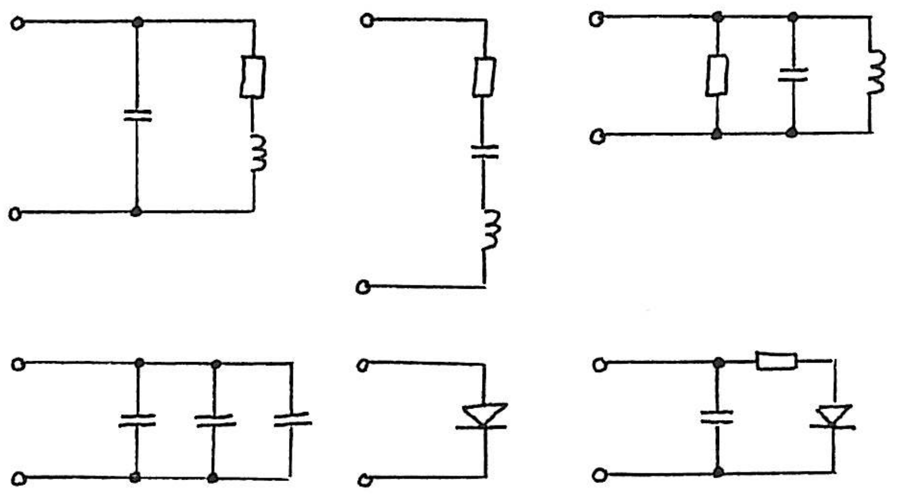
$$\begin{cases} u = Z_L \cdot i \\ Z_L = j\omega L \end{cases}$$

I næste afsnit skal vi se, hvorledes disse simple relationer, samt Kirchhoffs første og anden lov, gør det muligt at analysere vekselstrømskredsløb på en måde, som er meget nemmere end metoderne fra den reelle vekselstrømsteori.

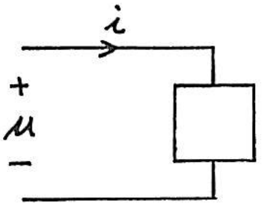
6. IMPEDANS OG ADMITTANS

Et elektronisk kredsløb, hvorfra to punkter er ført ud til omgivelserne, kaldes en <u>2-pol.</u>

Nedenfor er vist nogle eksempler på 2-poler:



Når vi skal behandle 2-poler generelt, vil vi ofte tegne dem således.



Her angiver „u" spændingen over 2-polen, og „i" angiver den tilsvarende strøm igennem 2-polen.

Hvis der findes et komplekst tal, Z, således at relationen

$$u = Z \cdot i$$

er gyldig for komplekse vekselspændinger og -strømme, vil vi sige, at 2-polen har <u>impedansen</u> Z.

Læg mærke til, at en impedans er et komplekst tal. Derfor indeholder den to informationer, nemlig dens modulus og dens argument.

Hvis en 2-pol har impedansen Z, så gælder 1) $\|Z\| = \dfrac{\|u\|}{\|i\|}$ 2) $\arg(Z) = \arg(u) - \arg(i)$ hvor u og i er henholdsvis spændingen over og strømmen igennem 2-polen.

Det er let at bevise, at dette er rigtigt:

$$u = Z \cdot i$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} |u| = |Z| \cdot |i| \\ \arg(u) = \arg(Z) + \arg(i) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{|u|}{|i|} \\ \arg(Z) = \arg(u) - \arg(i) \end{cases}$$

Impedansbegrebet er et uhyre anvendeligt begreb. Impedansens modulus er lig med forholdet mellem spændingens og strømmens amplitude. Impedansens argument er lig med faseforskellen mellem spændingen og strømmen. For at analysere en 2-pols egenskaber, er det derfor nok at analysere dens impedans. Som regel er impedansen frekvensafhængig. Analyser af impedanser drejer sig da også om at undersøge, hvorledes impedansens modulus og argument varierer med frekvensen.

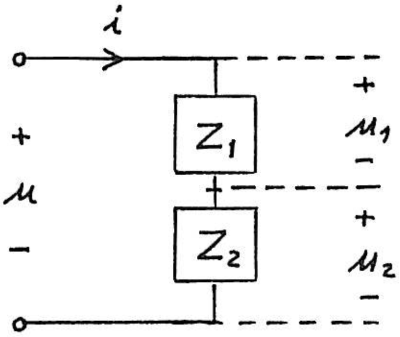
Når spændinger angives i volt og strømme i ampere, så får impedanser enheden ohm, der også skrives Ω.

Vi skal nu bevise følgende:

Een serieforbindelse af to 2-poler, med impedanserne Z_1 og Z_2, har impedansen $Z_1 + Z_2$.

$$u = Z \cdot i$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$



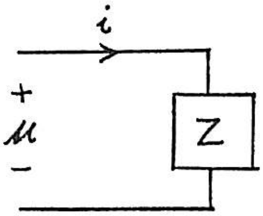
Med figurens betegnelser fås:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \quad \text{(Kirchhoffs 2. lov)} \\ &= Z_1 i + Z_2 i \\ &= (Z_1 + Z_2)\, i \end{aligned}$$

Hermed er det ønskede bevist.

Betragt nu en 2-pol med impedansen Z:

$$u = Z \cdot i$$



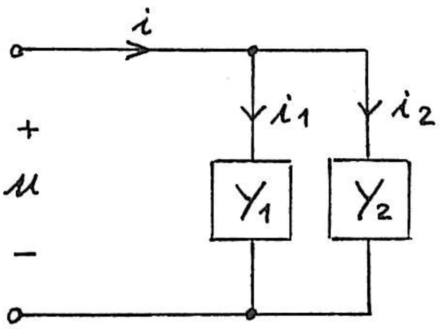
Den reciprokke værdi af impedansen kaldes <u>admittansen</u>. Den betegnes almindeligvis med Y:

$$Y = \frac{1}{Z} \, , \qquad i = Y \cdot u$$

Enheden for admittans er ohm^{-1} der også kaldes mho og skrives som ℧. Admittansbegrebet er nyttigt i mellemregninger på grund af følgende sætning:

En parallelforbindelse af to 2-poler med admittanserne Y_1 og Y_2 har admittansen $Y_1 + Y_2$

$$i = Y \cdot u$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$



I beviset benyttes figurens betegnelser:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \quad (\text{Kirchhoffs 1. lov}) \\ &= Y_1 u + Y_2 u \\ &= (Y_1 + Y_2)\, u. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

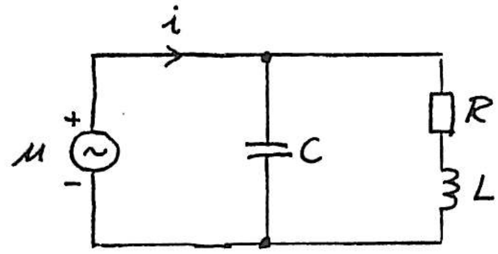
Med den nye terminologi, der er indført i dette afsnit, kan vi opsummere resultaterne fra afsnit 5 side 25 således:

Type	Værdi	Impedans	Admittans
Modstand	R	$Z_R = R$	$Y_R = \frac{1}{R}$
Kondensator	C	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Y_C = j\omega C$
Spole	L	$Z_L = j\omega L$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$

Øvelse 14. Angiv faseforskellen mellem spændingen og strømmen i henholdsvis en modstand, en kondensator og en spole.

Øvelse 15. Hvilken impedans har en kondensator på 68 nF ved frekvensen 1 kHz?. Angiv desuden impedansens modulus og argument.

Eksempel 3 I eksempel 1 side 7 forsøgte vi at analysere kredsløbet



idet vi gik ud fra, at u var en kendt vekselspænding. Modstanden, kondensatoren og spolen udgør en 2-pol. Den samlede impedans af modstanden og spolen er

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = R + j\omega L$$

kredsløbets samlede admittans er derfor

$$Y = Y_C + Y_{RL} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

Heraf fås kredsløbets samlede

impedans:

$$Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}}$$

$$= \frac{R + j\omega L}{j\omega C(R + j\omega L) + 1}$$

$$= \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\,\omega RC}$$

Hermed er problemet løst, idet den søgte strøm nu kan findes:

$$u = Z \cdot i$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{i = \frac{u}{Z}}}$$

For at konkretisere denne løsning, vil vi antage, at den kendte vekselspænding har amplituden 2 volt og frekvensen 3kHz. Vekselspændingens begyndelsesfase, som er ret uinteressant, vælger vi at sætte til 0 radianer. Desuden vil vi antage, at modstanden, spolen og kondensatoren har værdierne 56 Ω, 22 mH og 120 nF, henholdsvis.

Når vi skal beregne impedansen, er det nok lettest at beregne tælleren og nævneren hver for sig.

$$Z = \frac{a}{b} \,, \quad a = R + j\omega L \,, \quad b = (1-\omega^2 LC) + j\omega RC$$

Først beregnes tælleren:

$$\begin{aligned} a &= R + j\omega L \\ &= R + j\,2\pi f L \\ &= 56 + j\,2\pi \cdot 3k \cdot 22\,m \\ &= 56 + j\,414{,}7 \end{aligned}$$

Heraf fås

$$|a| \simeq 418{,}5$$
$$\arg|a| \simeq 1{,}437$$

Dernæst beregnes nævneren:

$$\begin{aligned} b &= (1-\omega^2 LC) + j\omega RC \\ &= (1-(2\pi f)^2 LC) + j\,2\pi f RC \\ &= (1-(2\pi \cdot 3k)^2 \cdot 22\,m \cdot 120\,n) + j\,2\pi \cdot 3k \cdot 56 \cdot 120\,n \\ &\simeq 0{,}06199 + j\,0{,}1267 \end{aligned}$$

Dette giver

$$|b| \simeq 0{,}1410$$
$$\arg(b) \simeq 1{,}116.$$

Endelig beregnes selve impedansen.
Först beregnes modulus:

$$|z| = \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{418,5}{0,1410} = 2967$$

Så beregnes argumentet:

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$
$$= 1,437 - 1,116 = 0,3209$$

Altså

$$|i| = \left|\frac{u}{z}\right| = \frac{|u|}{|z|} = \frac{2}{2967} = 674,0\,\mu$$

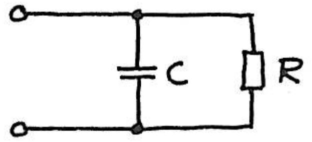
og

$$\arg(i) = \arg\left(\frac{u}{z}\right) = \arg(u) - \arg(z)$$
$$= \arg(u) - 0,3209$$
$$= 2\pi \cdot 3k\, t - 0,3209$$

Kredsløbet trækker derfor en strøm med amplitude 674,0 μA, frekvens 3 kHz og begyndelsesfase −0,3209 radianer.

$$\underline{\underline{i(t) = 674,0 \cdot 10^{-6}\, e^{j(2\pi \cdot 3 \cdot 10^{3} t - 0,3209)}}}$$

Övelse 16. Find et udtryk for impedansen, Z, af 2-polen



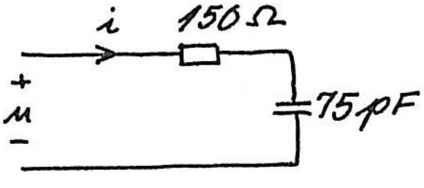
Gör dernæst rede for, at

1) $Z \to R$ for $f \to 0$

2) $Z \to 0$ for $f \to \infty$,

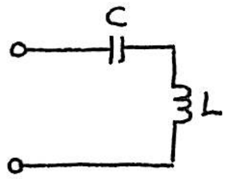
hvor f som sædvanlig betegner frekvensen.

Övelse 17. Beregn spændingens amplitude, når det vides, at strömmen har amplituden 5 mA og frekvensen 14 MHz :



Övelse 18. Hvad er forskellen mellem spændingens og strömmens fase i kredslöbet i övelse 17 ?

Øvelse 19. Find et udtryk for impedansen, Z, af 2-polen:



Gør dernæst rede for, at

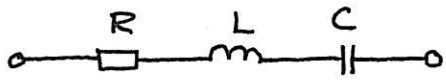
1) $|Z| \to \infty$ for $f \to 0$
2) $|Z| \to \infty$ for $f \to \infty$

Bevis til slut, at der findes en frekvens, f_0, for hvilken $Z = 0$.

Øvelse 20. Det antages, at kondensatoren i øvelse 19 har en værdi på 50 pF, og at spolen er på 5 μH. Beregn frekvensen f_0.

7: SERIERESONANSKREDSEN

I dette afsnit skal vi analysere en såkaldt <u>serieresonanskreds</u>:



Dette er en 2-pol, hvis impedans er:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$
$$= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

<u>Øvelse 21.</u> Når ω gennemlöber de positive reelle tal, vil Z gennemlöbe en bane i den komplekse talplan. Giv en beskrivelse af denne bane.

<u>Øvelse 22.</u> Bevis, at $\arg(Z)$ kan antage enhver værdi i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og kun disse.

Vi vil nu koncentrere os om at undersöge impedansens modulus:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Downarrow$$

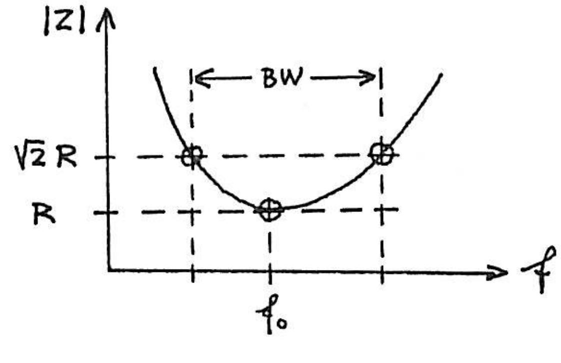
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Heraf ses, at $|Z|$ er mindst, når sidste led under kvadratrodstegnet er nul. Den frekvens for hvilken dette indtræffer kaldes resonansfrekvensen og betegnes med f_0. Den tilsvarende vinkelfrekvens betegner vi med ω_0. Ved resonansfrekvensen er impedansen lig med R. Desuden ses af udtrykket for $|Z|$, at $|Z|$ vokser, når ω nærmer sig 0 og ∞. Afstanden mellem de to frekvenser, ved hvilke $|Z|$ er vokset til $\sqrt{2} \cdot R$ kaldes båndbredden, og den betegnes med BW (= bandwidth)

Øvelse 23. Bevis, at båndbredden er lig med afstanden mellem de to frekvenser ved hvilke $\arg(Z)$ er henholdsvis $-\frac{\pi}{4}$ og $+\frac{\pi}{4}$.

En god seriekreds er kendetegnet ved, at båndbredden er meget lille i forhold til resonansfrekvensen. Det reciprokke forhold, altså forholdet mellem resonansfrekvensen og båndbredden, kan derfor benyttes som mål for, hvor god kredsen er. Dette forhold kaldes <u>godheden</u> og betegnes med Q, som er en forkortelse af „quality".

Vi har nu defineret tre nye begreber, nemlig resonansfrekvens, båndbredde og godhed. Disse begreber er illustreret på nedenstående skitse:



$$Q = \frac{f_0}{BW}$$

Det er indlysende, at de tre størrelser, f_0, BW og Q må afhænge af 2-polens komponenter, R, L og C. I det følgende vil vi udlede formler, der udtrykker f_0, BW og Q ved R, L og C.

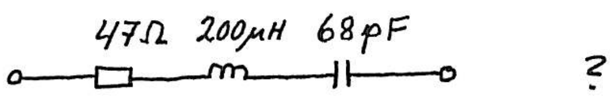
Først beregner vi f_0, som er karakteriseret ved, at impedansens imaginærdel er nul:

$$
\begin{aligned}
& \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \\
\Updownarrow\quad & \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \\
\Updownarrow\quad & \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\
\Updownarrow\quad & \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
\Updownarrow\quad & 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
\Updownarrow\quad & f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}
\end{aligned}
$$

Altså har vi fundet:

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

Øvelse 24. Hvilken resonansfrekvens har seriekredsen:



Øvelse 25. En serieresonanskreds med resonansfrekvens 600 kHz har godheden 80. Beregn båndbredden.

Vi vil nu udtrykke kredsens godhed ved hjælp af R, L og C. De to frekvenser, der afgrænser båndbredden, er karakteriseret ved, at impedansens modulus er lig med $\sqrt{2}R$:

$$|Z| = \sqrt{2}R$$
$$\Updownarrow$$
$$|Z|^2 = 2R^2$$
$$\Updownarrow$$
$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -R \quad \vee \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$
$$\Updownarrow$$
$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0 \quad \vee \quad \omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0$$

Begge andengradsligninger har positiv diskriminant (check selv dette!), og de har derfor hver to løsninger. Da sidste led i hver af andengradsligningerne er negativt, har de to rødder i hver ligning modsat fortegn. Hver ligning har derfor precis én positiv løsning. Disse løsninger kalder vi henholdsvis ω_1 og ω_2. Altså kan vi regne videre :

$$\begin{cases} \omega_1^2 LC + \omega_1 RC - 1 = 0 \\ \omega_2^2 LC - \omega_2 RC - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) LC + (\omega_1 + \omega_2) RC = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2) LC + (\omega_1 + \omega_2) RC = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\omega_1 - \omega_2) LC + RC = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{RC}{LC}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi f_2 - 2\pi f_1 = \frac{R}{L}$$

$$\Downarrow$$

$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

$$\Downarrow$$

$$BW = \frac{R}{2\pi L}$$

Her har vi brugt f_2 og f_1 som betegnelser for de frekvenser, der afgrænser båndbredden. Det fundne udtryk for båndbredden sætter os i stand til at beregne den ønskede formel for godheden:

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}{\frac{R}{2\pi L}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Altså

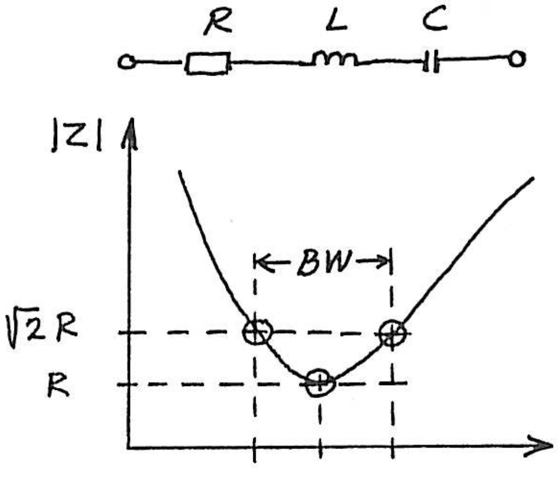
$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Af dette udtryk for Q ses blandt andet, at en god seriekreds har en modstand R, der er lille i forhold til størrelsen $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Øvelse 26. Bevis, at ved resonansfrekvensen er $|Z_L| = |Z_C| = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Øvelse 27. Beregn godheden af den seriekreds, der er beskrevet i øvelse 24. Benyt derefter den beregnede godhed samt resultatet i øvelse 24 til at beregne kredsens båndbredde.

Resumé af serieresonanskredsen:

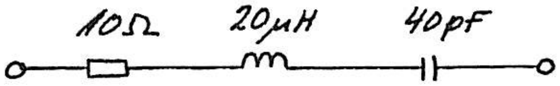


$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$BW = \frac{f_0}{Q}$$

Eksempel 4. For serieresonanskredsen



gælder ifølge de udledte formler, at

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\mu\cdot 40p}} \simeq 5{,}63\ \mathrm{MHz}$$

$$Q = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{20\mu}{40p}} \simeq 70{,}7$$

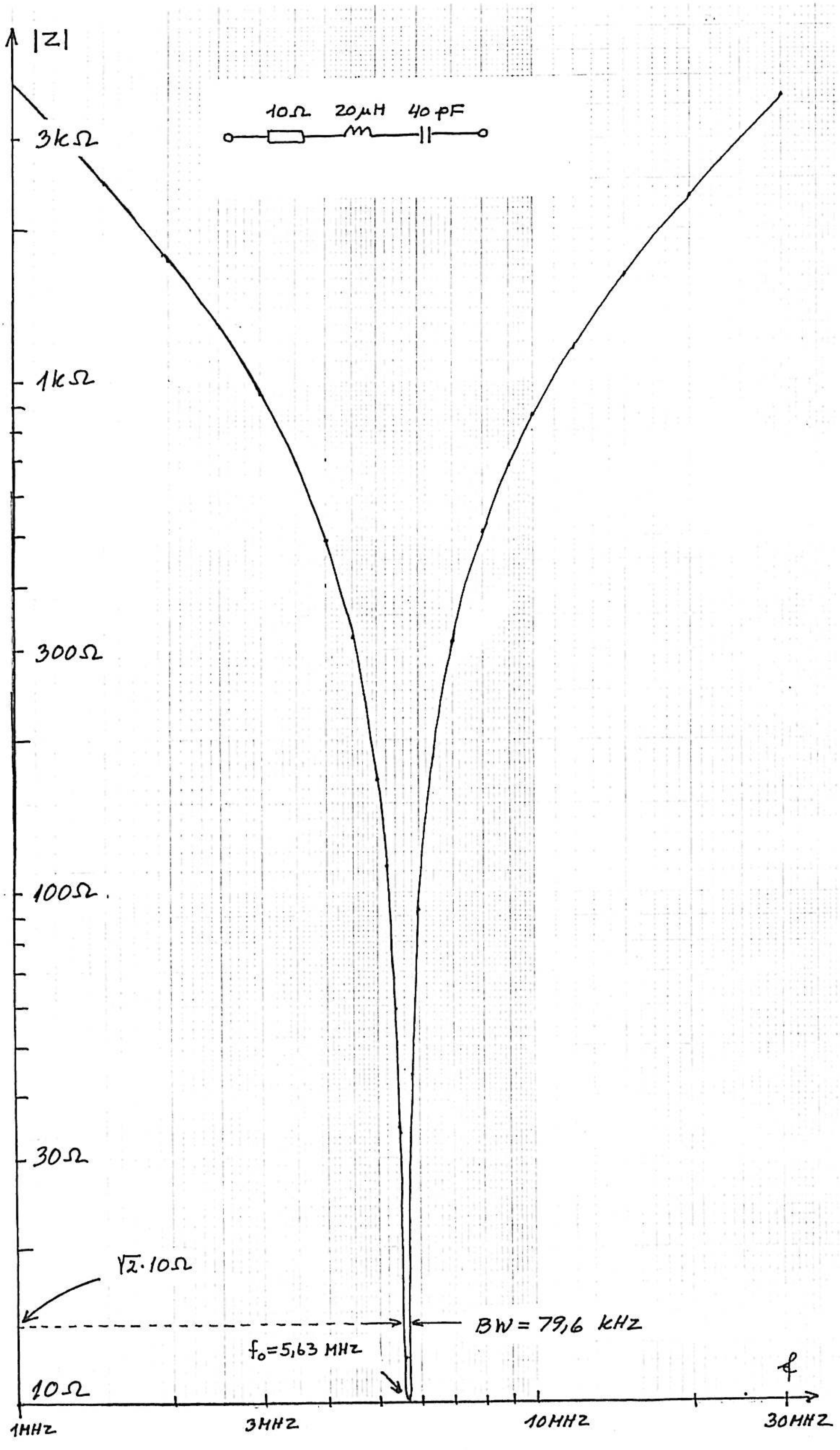
$$BW = \frac{5{,}63M}{70{,}7} \simeq 79{,}6\ \mathrm{kHz}$$

Endvidere er

$$|Z| = \sqrt{10^2 + \left(2\pi f\, 20\mu - \frac{1}{2\pi f\, 40p}\right)^2}$$

Grafen for |Z| som funktion af f er særlig smuk, når den tegnes i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem (jævnfør øvelse 28). Grafen er tegnet på den følgende side.

SIDE 46.


|Z|
3kΩ
1kΩ
300Ω
100Ω
30Ω
10Ω
√2·10Ω
10Ω 20μH 40pF
BW = 79,6 kHz
f₀=5,63 MHz
f
1MHz
3MHz
10MHz
30MHz

Øvelse 28 Bevis, at modulus af seriekredsens impedans kan udtrykkes ved

$$|Z| = R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Benyt derefter dette udtryk til at forklare, hvorfor grafen i eksempel 4 er symmetrisk omkring resonansfrekvensen.

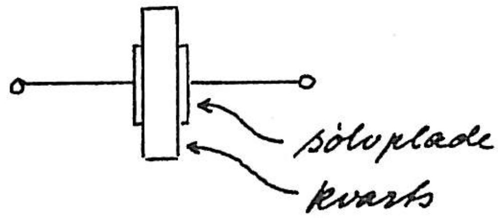
Øvelse 29. Bevis, at argumentet af seriekredsens impedans kan udtrykkes ved

$$\arg(Z) = \arctan\left(Q\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)\right).$$

Øvelse 30. Benyt resultaterne i øvelse 28 til at bevise, at en seriekreds' resonansfrekvens samt de to frekvenser, f_1 og f_2, der afgrænser båndbredden opfylder følgende

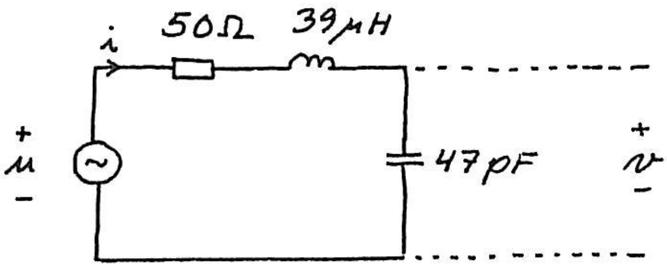
$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

Øvelse 31. Et pietzo-elektrisk krystal er en tynd skive af kvarts, som er opspændt mellem to ledende plader:



Hvis de to terminaler påtrykkes en elektrisk spænding, opstår der en mekanisk forvridning i krystallet. Når spændingen fjernes eller skifter polaritet, svarer krystallet igen, ved at rette sig ud. Derved skaber krystallet selv en elektrisk spænding på de to terminaler. Undersøgelser har vist, at krystallet opfører sig som en serieresonanskreds med en fantastisk høj Q-værdi. Resonansfrekvensen kan justeres ved slibning af krystallet. På et bestemt krystal måltes en resonansfrekvens på 8,752103 MHz og en båndbredde på 624 Hz. Beregn krystallets Q-værdi.

Øvelse 32



Vekselspændingsgeneratoren leverer en vekselspænding med amplituden 1 volt. Dens frekvens justeres indtil strømmens amplitude er maksimal.

a) Beregn generatorens frekvens.

b) Beregn strømmens amplitude.

c) Beregn amplituden af spændingen, v, over kondensatoren.

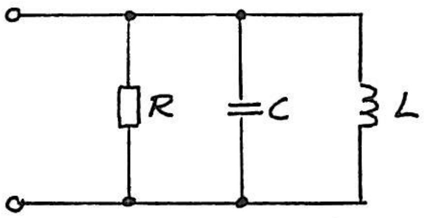
d) Sammenlign amplituderne af u og v, og forklar resultatet.

e) Beregn seriekredsens godhed.

f) Beregn seriekredsens båndbredde.

8. PARALLELRESONANSKREDSEN.

En 2-pol, der er opbygget af en modstand, en kondensator og en spole i parallel-kobling, kaldes en <u>parallelresonanskreds</u>:

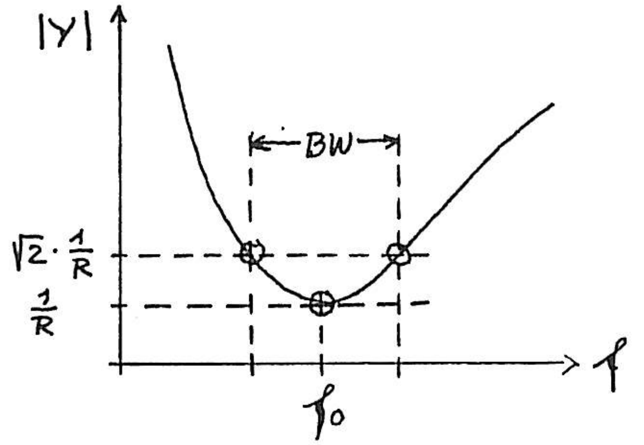


Dens samlede admittans er summen af de enkelte komponenters admittans:

$$
\begin{aligned}
Y &= Y_R + Y_C + Y_L \\
&= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\
&= \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)
\end{aligned}
$$

Ved en sammenligning med side 38 ses, at formlen for parallelkredsens admittans har samme form som formlen for seriekredsens impedans. Den eneste forskel er, at „impedans" er erstattet af „admittans", og „R" er erstattet af „$\frac{1}{R}$", og „L" og „C" er byttet om. Alle de resultater, vi i afsnit 7 har fundet angående seriekredsens impedans, kan derfor overføres til

Tilsvarende resultater for parallel-kredsens admittans:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$BW = \frac{f_0}{Q}$$

__Øvelse 33.__ Kontrollér, at ovenstående oversigt er i overensstemmelse med resultaterne på side 44, med de ændringer, der blev nævnt på forrige side.

Ovenstående skitse viser modulus af parallelkredsens admittans som funktion af frekvensen. Da parallelkredsens impedans blot er reciprokværdien af dens admittans, får vi:

$$Z = \frac{1}{Y}$$

$$\Downarrow$$

$$|Z| = \frac{1}{|Y|}$$

Heraf fås, at ved resonansfrekvensen gælder:

$$|Y| = \frac{1}{R}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{|Y|} = R$$
$$\Downarrow$$
$$|Z| = R$$

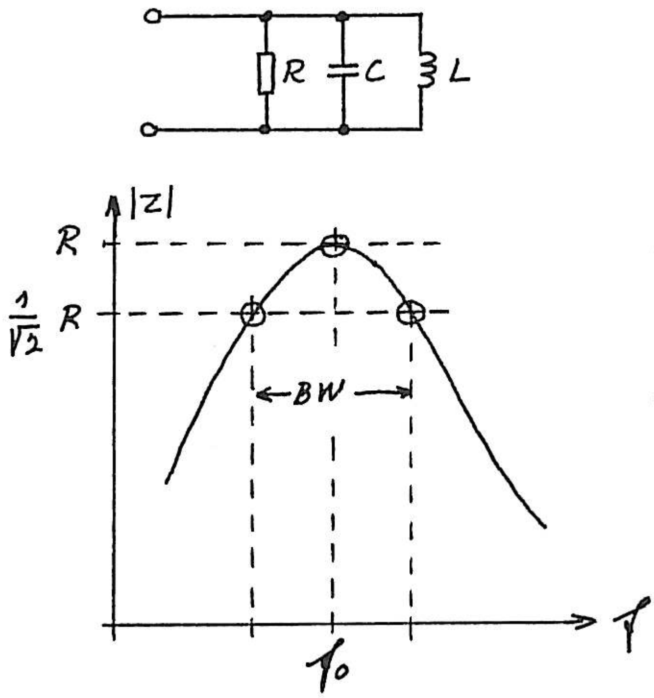
Desuden kan vi finde $|Z|$ ved de to frekvenser, der afgrænser båndbredden:

$$|Y| = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{R}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{|Y|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R$$
$$\Downarrow$$
$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R$$

Båndbredden er altså karakteriseret ved at være afstanden mellem de to frekvenser, ved hvilke impedansens modulus er $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R$.

Vi kan på denne baggrund samle resultaterne om parallelresonanskredsen således:

Resumé af parallelresonanskredsen:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$BW = \frac{f_0}{Q}$$

Rent formelmæssigt adskiller parallelkredsen sig kun fra seriekredsen ved den nye formel for godheden, Q. Af denne ses, at en god parallelkreds er karakteriseret ved, at R er stor i forhold til $\sqrt{\frac{L}{C}}$

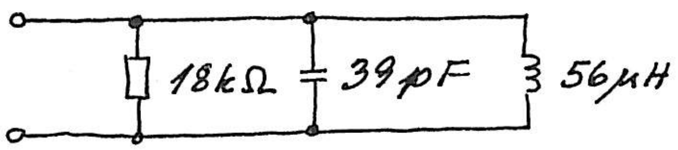
<u>Øvelse 34.</u> Bevis, at ved resonansfrekvensen er $|Z_L| = |Z_C| = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Sammenlign dette med resultatet i øvelse 26 side 44.

Øvelse 35. Af udtrykket for parallelkredsens admittans (side 50) finder man udtrykket for parallelkredsens impedans:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

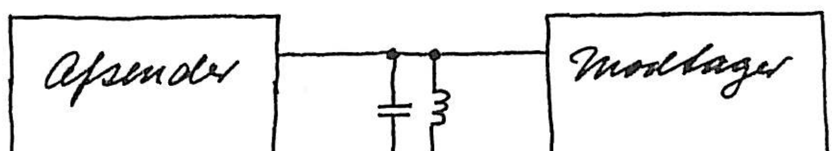
Beregn et udtryk for re(Z) og for im(Z). Benyt disse udtryk til at bevise, at når ω gennemløber de positive reelle tal, så vil Z gennemløbe en del af en cirkel i den komplekse talplan. Beregn cirklens centrum og radius, og gør rede for, hvilken del af cirklen Z gennemløber.

Øvelse 36 Beregn resonansfrekvensen, båndbredden og godheden af nedenstående parallelkreds:



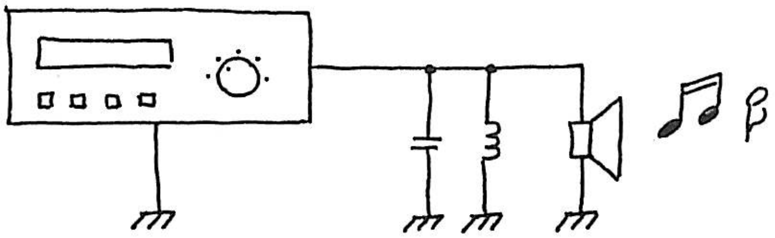
Øvelse 37. I en given parallelresonanskreds er modstandsværdien lig med 10 kΩ, og kredsens godhed er 26. Beregn modulus af spolens impedans ved resonansfrekvensen. Beregn tillige modulus af kondensatorens impedans ved resonansfrekvensen.

Parallelkredse benyttes ofte i transmissionssystemer, hvor vekselspændingssignaler skal overføres fra en „afsender" til en „modtager", og hvor det er vigtigt, at kun et smalt bånd af frekvenser når frem til „modtageren":

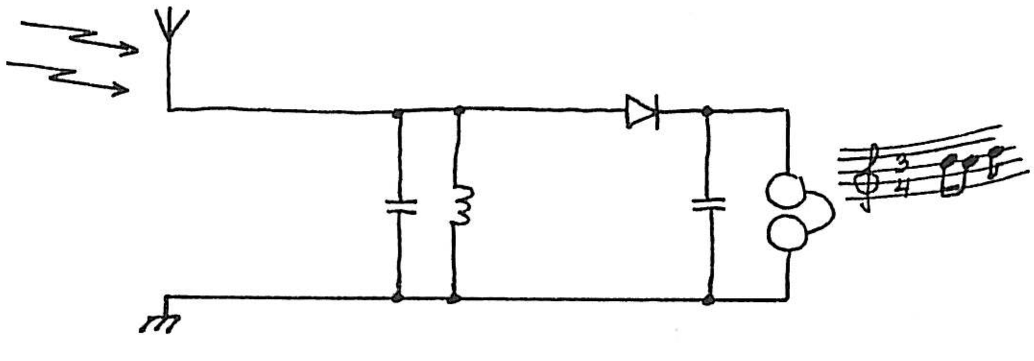


Den ene af de to ledninger, der transporterer signalet, er ofte forbundet til apparaternes chassiser, og er signalmæssigt „død". Denne ledning betegnes med ⏚.

Et eksempel på et sådant transmissionssystem har vi, når en HI-FI-forstærker via en parallelkreds leverer spændingssignaler til en mellemtonehøjttaler:

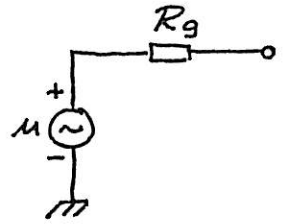


Et andet eksempel er transmissionen af radiosignaler, som opfanges af en antenne, og som derfra sendes via en parallelkreds til en diodemodtager:



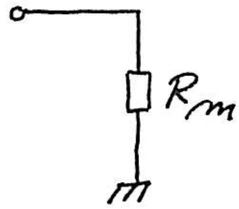
For at undersøge sådanne systemer generelt, vil vi antage, at „afsenderen" kan betragtes som en spændingsgenerator med en vis indre modstand:

Afsender =

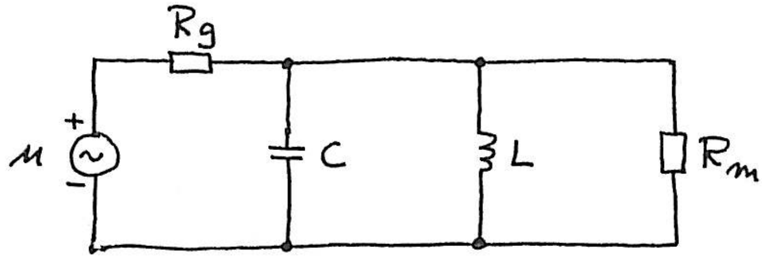


Desuden vil vi antage, at „modtageren" kan repræsenteres af en modstand, hvori den leverede effekt afsættes:

Modtageren =

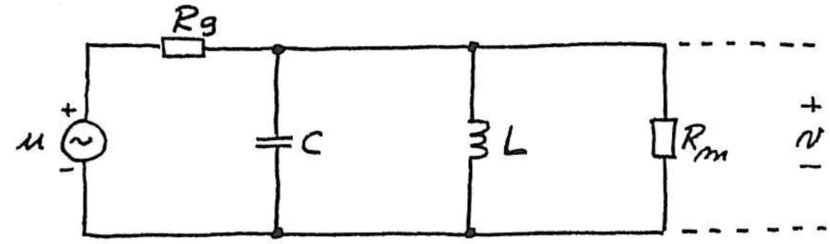


Herefter kan transmissionssystemet tegnes således:

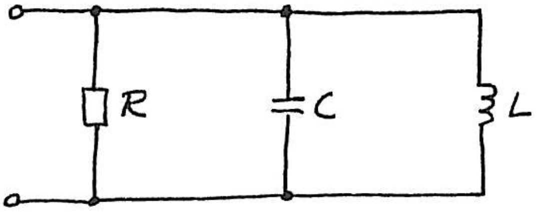


Vi skal mest interessere os for, i hvor høj grad signaler med varierende frekvens slipper igennem systemet fra generatoren til modtageren. Dette kan vi undersöge ved finde ud af, hvorledes amplituden af den modtagne vekselspænding afhænger af frekvensen. Der gælder fölgende sætning:

I transmissionssystemet



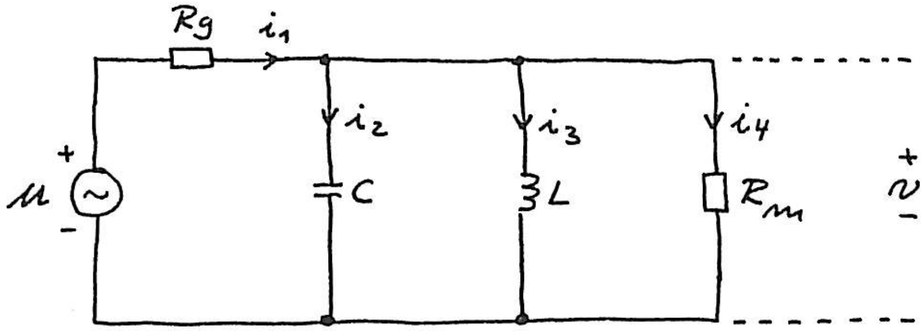
forudsættes, at generatorens amplitude er konstant. Så er amplituden af v proportional med modulus af impedansen af parallelresonanskredsen



$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_m}}$$

hvor R er parallelforbindelsen af R_g og R_m.

For at bevise denne sætning ser vi på diagrammet



Ved anvendelse af Kirchhoffs 1. lov fås :

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u-v}{R_g} = \frac{v}{Z_C} + \frac{v}{Z_L} + \frac{v}{R_m}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u}{R_g} = v\left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{R_m}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u}{R_g} = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{u}{R_g} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}}$$

Det ses, at $\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}$ netop er admittansen af den i sætningen beskrevne parallelresonanskreds. Reciprokværdien af denne admittans er derfor parallelresonanskredsens impedans. Denne vil vi betegne med Z:

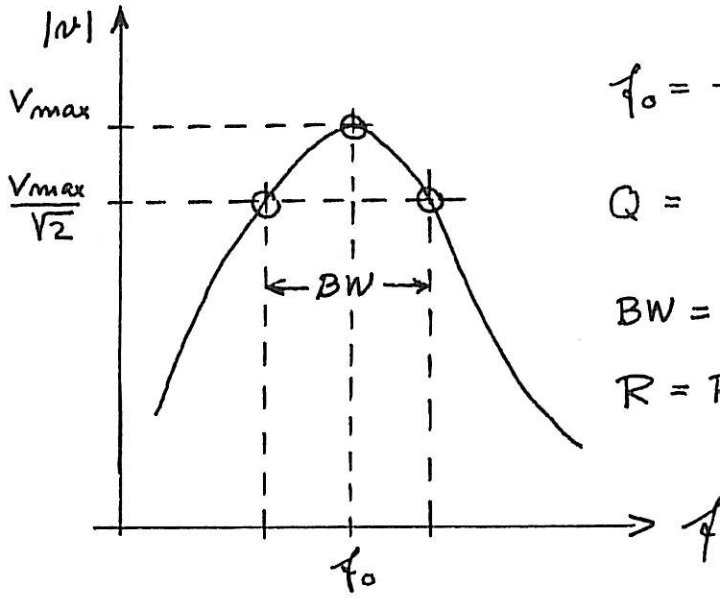
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_L}}$$

Med denne betegnelse får vi:

$$v = \frac{u}{R_g} \cdot Z$$
$$\Downarrow$$
$$|v| = \frac{|u|}{R_g} \cdot |Z|$$

Da $|u|$ er konstant, uafhængigt af frekvensen, ses heraf, at $|v|$ er proportional med $|Z|$. Dermed er det ønskede bevist.

I kraft af dette resultat, kan vi se, at amplituderne af de modtagne signaler vil afhænge af frekvensen på en måde, der præcis svarer til den måde, modulus af impedansen af den tilsvarende parallelkreds afhænger af frekvensen. Ifølge tegningen på side 53 vil de modtagne signaler altså have maksimal amplitude ved resonansfrekvensen. Og båndbredden er netop afstanden mellem de frekvenser, hvor de modtagne signalers amplituder er faldet med faktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

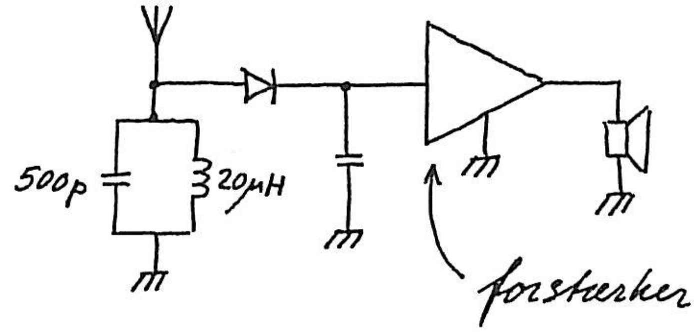
$$Q = \frac{f_0}{BW} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$BW = \frac{f_0}{Q}$$

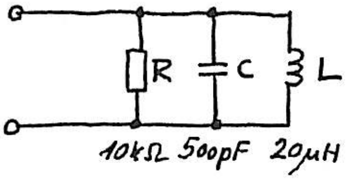
$$R = R_g \parallel R_m = \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_m}}$$

<u>Øvelse 38.</u> Gør rede for, at transmissionssystemets båndbredde netop er afstanden mellem de frekvenser, ved hvilke den modtagne effekt er halvdelen af den modtagne effekt ved resonansfrekvensen.

Eksempel 5. 500pF og 20μH skal bruges som parallelresonanskreds i en diodemodtager til den højfrekvente ende af mellembølgeområdet:



Antennens indre modstand og diodens belastning af parallelkredsen vurderer vi til at give en nettomodstand på 10 kΩ parallelt over kredsen:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\mu \cdot 500p}} \simeq 1{,}59\,\text{MHz}$$

$$Q = 10k \cdot \sqrt{\frac{500p}{20\mu}} \simeq 50{,}0$$

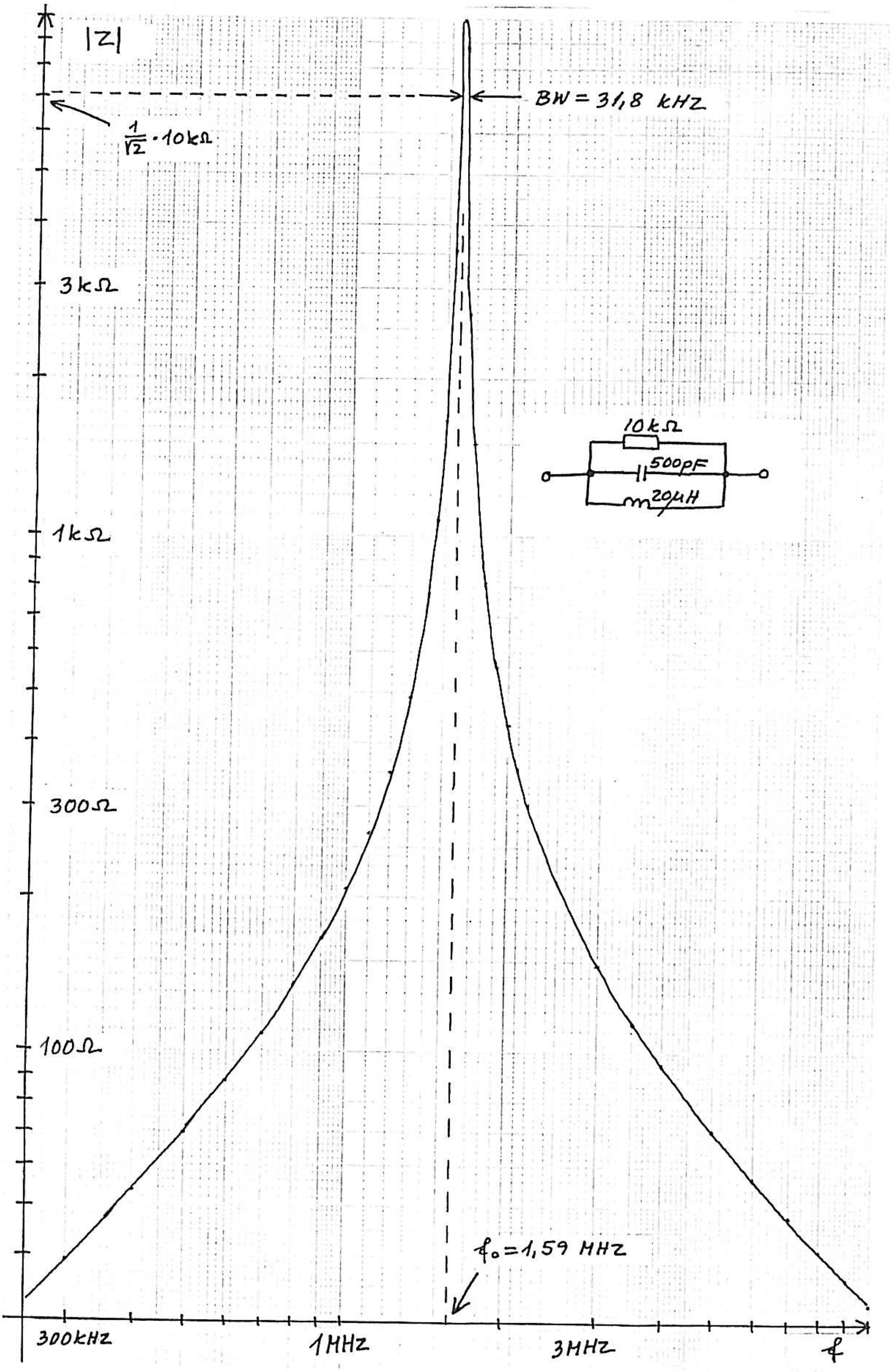
$$BW = \frac{1{,}59M}{50} \simeq 31{,}8\,\text{kHz}$$

Desuden er

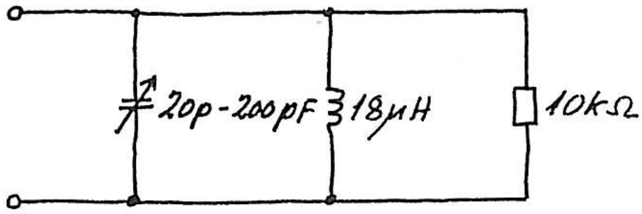
$$|Z| = \frac{1}{\left|\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_L}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)^2}}$$

Grafen for $|Z|$ som funktion af f er tegnet på næste side:

SIDE 63


|Z|
BW = 31,8 kHz
1/√2 · 10kΩ
3kΩ
1kΩ
300Ω
100Ω
10kΩ
500pF
20μH
f₀=1,59 MHz
300kHz
1MHz
3MHz
f

Øvelse 39.



Parallelkredsen ovenfor er udstyret med en variabel kondensator, således at resonansfrekvensen kan varieres.

a) Beregn den mindste og den største resonansfrekvens.

b) Ved hvilken frekvens er godheden størst / mindst ?

c) Beregn kredsens største og mindste godhed.

Øvelse 40. Undersøg, om det er rigtigt, at hvis man tager en serieresonanskreds med stor Q - værdi og bruger dens tre komponenter til at lave en parallelresonanskreds med, så får parallelkredsen også en stor Q - værdi.

Øvelse 41. Bevis, at impedansen af en parallelresonanskreds kan udtrykkes ved

$$Z = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Vis dernæst, at

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

og

$$\arg(Z) = \arctan\left(Q\left(\frac{f_0}{f} - \frac{f}{f_0}\right)\right)$$

Øvelse 42. Om en bestemt parallelresonanskreds vides, at parallelmodstanden er 5 kΩ, resonansfrekvensen er 4 MHz, og båndbredden er 160 kHz.

a) Beregn modulus og argument af kredsens impedans ved henholdsvis 3 MHz, 4 MHz og 5 MHz.

b) Beregn kredsens C- og L-værdier.