DE KOMPLEKSE TALS HISTORIE.

For helt at forstå idéen bag de komplekse tal, er det nødvendigt at kende lidt til den udvikling, der har ført frem til de reelle tal. Hver enkelt fase af denne udvikling minder nemlig på mange måder om springet fra de reelle tal til de komplekse tal.

I dag udgør de reelle tal en væsentlig del af vores praktiske og åndelige aktiviteter. Vi fører regnskab med penge, opmåler land, beregner skat, måler temperatur og så videre. Gennem hele vor opvækst er vi blevet opdraget til at bruge mængden af de reelle tal som et ganske naturligt redskab i forbindelse med alle beregningsmæssige opgaver.

Men sådan har det ikke altid været. De reelle tal er resultatet af en langvarig udvikling, der tog sit udspring med menneskets ønske om at udtrykke simple kvantitative størrelser. For eksempel må der meget tidligt have været et behov for at holde styr på, hvor mange husdyr man ejede, eller hvor mange dage der var mellem ebbe og flod. De første anvendelser af tal fortaber sig i fortiden, men det er nærliggende at gætte på, at selv de tidligste menneskelige kulturer har benyttet nogle tællemetoder, omend disse kan have været meget simple.

Senere øgedes kravene til tallenes beregningsmæssige egenskaber, og så måtte man opfinde mere raffinerede talsystemer. De nye talsystemer gav en større matematisk indsigt. Men just derfor blev man i stand til at formulere fornyede krav til talsystemerne. På den måde har tallene udviklet sig gennem årtusinder som en stadig vekselvirkning mellem større matematisk indsigt og øgede beregningsmæssige krav. I den følgende oversigt fremhæves nogle af hovedpunkterne i denne udvikling.

De naturlige tal består af tallene 1, 2, 3, ... De kaldes ofte tælletallene, fordi det er dem man bruger, når man tæller. Men de kan også i begrænset udstrækning bruges i forbindelse med aritmetiske operationer. Såvel summen som produktet af to naturlige tal er naturlige tal. Af denne grund siger man, at de naturlige tal er stabile over for addition og multiplikation. På trods af denne pæne egenskab, findes der nogle ganske simple additive ligninger, der ikke har nogen løsning inden for de naturlige tal. For eksempel har hverken 5+x=3 eller 5+x=5 nogen løsning.

For at kunne løse alle ligninger af formen a+x=b er det nødvendigt at udvide talmængden til også at omfatte nul og de negative hele tal. Dermed har vi mængden af alle de hele tal til rådighed. Den består af tallene ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... De hele tal er, ligesom de naturlige tal, stabile over for addition og multiplikation. Men talmængden er stadig utilfredsstillende, idet der findes nogle simple multiplikative ligninger, der ikke har løsninger. Dette gælder for eksempel ligningen 5x=3.

Mængden af de rationale tal løser dette problem. Den består af alle tal af formen b/a, hvor a og b er hele tal, med a≠0. De rationale tal er en udvidelse af de hele tal, idet et vilkårligt helt tal kan opfattes som en brøk med nævneren 1. Med denne udvidelse er man i stand til at løse alle ligninger af typen ax=b, med a≠0.

Den næste udvidelse af talmængden var en konsekvens af opdagelsen af, at der findes liniestykker, hvis længder ikke er rationale. Allerede 300 år før vor tidsregning kendtes et bevis for, at længden af diagonalen i et enhedskvadrat ikke er rational. Opdagelsen af de irrationale tal øvede en gennemgribende indflydelse på erkendelsesfilosofien. Man havde hidtil troet, at alle naturens fænomener kunne udtrykkes ved simple rationale tal. I oldtidens Grækenland var der ligefrem filosofiske skoler, for eksempel Den Pythagoræiske Skole, hvis medlemmer havde viet hele deres liv til studiet af den guddommelige natur set i lyset af de rationale tal.

Utilstrækkeligheden af de rationale tal kom som et chok, for disse mennesker, og opdagelsen var den direkte årsag til en total omlægning af den kurs, den græske matematik hidtil havde fulgt.

Man måtte igen til at udvide talmængden. Denne gang resulterede det i mængden af de reelle tal. Den indeholder foruden de rationale tal også de irrationale. Det teoretiske grundlag for de reelle tal har været et virkeligt stort problem, som først er blevet løst på tilfredsstillende måde i nyere tid.

Når man skal gøre fuldstændigt rede for de reelle tals regnemæssige egenskaber, opdager man hurtigt, at en simpel opremsning af alle gyldige regler og formler ikke er nogen brugbar fremgangsmåde. Dertil er der alt for mange regler. Det er mere økonomisk at finde et passende lille sæt af regler, hvoraf alle de andre kan udledes. Et sådant grundlæggende regelsæt kaldes et aksiomssystem, og de enkelte regler i aksiomssystemet kaldes aksiomer.

Man opnår en ekstra fordel ved at anvende et aksiomssystem, thi enhver talmængde, der opfylder de samme aksiomer som de reelle tal, har automatisk de samme regnemæssige egenskaber. Det skyldes, at de regnemæssige egenskaber er konsekvenser af aksiomerne. Derfor er man fritaget for at bevise gyldigheden af alle de sædvanlige regler, når man tager en ny talmængde i brug. Man kan nøjes med at bevise, at de få aksiomer er gyldige for den pågældende talmængde.

En talmængde med to regneoperatorer, addition og multiplikation, som opfylder de samme aksiomer som de reelle tal, kaldes et legeme. Aksiomssystemet for et legeme er behandlet mere præcist i appendiks I. På nuværende tidspunkt vil vi nøjes med at slå fast, at i et legeme er alle de sædvanlige regneregler gældende. Blandt de talmængder, der er nævnt ovenfor, er det kun de rationale tal og de reelle tal, der er legemer.

I ovenstående oversigt har vi set, hvorledes talmængderne har udviklet sig. De naturlige tal blev udvidet til at omfatte alle hele tal. Disse blev igen udvidet til at omfatte alle rationale tal. De rationale tal udgør et legeme, og er derfor i regnemæssig henseende en tilfredsstillende talmængde at arbejde med. Men på grund af opdagelsen af irrationale geometriske længder, måtte man udvide til de reelle tal, som også er et legeme.

De komplekse tal er en naturlig fortsættelse af denne udvikling. De er kommet til verden for at tilfredsstille nogle krav, som de reelle tal ikke har kunnet tilgodese. Der er flere mangler ved de reelle tal. For eksempel er det umuligt at tage kvadratroden af et negativt tal. Dette kan også udtrykkes ved, at ligningen $x^2+a=0$ ikke har nogen løsning, når $a>0$. Hvis man kunne finde en talmængde, hvori ethvert polynomium af grad større end nul har et nulpunkt, så ville dette og alle lignende problemer bortfalde. Desuden er det naturligt at kræve, at en eventuel ny talmængde skal udgøre et legeme, der indeholder de reelle tal. Hvis vi sikrer os, at dette bliver opfyldt, kan vi nemlig bare fortsætte med at bruge de gamle kendte regneregler.

Man kan bevise, at hvis der findes et legeme, der er en udvidelse af de reelle tal, og hvori ligningen $x^2+1=0$ har en løsning, så har ethvert polynomium af grad større end nul et nulpunkt i dette legeme. (Dette skal vi ikke bevise her). Når man skal forsøge at finde den beskrevne forbedring af de reelle tal, er det derfor tilstrækkeligt at lede efter et legeme, der indeholder de reelle tal, og hvori ligningen $x^2+1=0$ har en løsning. I appendiks II er der gjort rede for, at der virkelig findes et sådant legeme, nemlig de komplekse tal.

Caspar Wessel (1745-1818) var den første, der påviste eksistensen af de komplekse tal. Han er født i Norge, som på den tid var underlagt det dansk-norske riges enevældige styre med hovedstad i København. Europa var dengang inde i en voldsom kulturel udvikling med nytænkning inden for næsten alle områder: teater, litteratur, malerkunst, kemi, fysik, matematik og så videre. For eksempel var det i denne periode, at Galvani, Volta og Ørsted gjorde deres store opdagelser angående elektriciteten og dens natur.

Efter endt gymnasietid i Oslo flyttede Caspar Wessel til København, hvor han tog juridisk embedseksamen. Senere blev han landmålingsinspektør i Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. I den forbindelse ledede han den meget vanskelige opmåling af kongeriget. Det var et arbejde, han udførte med stor interesse og opfindsomhed. Hans storebror, digteren Johan Herman Wessel, skrev om ham:

> Han tegner Landkort og læser Loven,
> han er saa flittig som jeg er doven.

Men Caspar Wessel blev irriteret over, at han i tilknytning til sit arbejde ustandselig løb ind i umulige matematiske operationer. Derfor fik han idéen til at udvide talmængden, således at det blandt andet blev tilladt at uddrage kvadratroden af -1. I 1797 afleverede han en afhandling om dette til Videnskabernes Selskab. Dens titel var:

> Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Den rummede det formelle fundament for de komplekse tal. Caspar Wessel havde sikkert regnet med, at afhandlingen ville virke provokerende, og at den ville afføde protester fra matematikere, der ikke ville tolerere sådant noget vrøvl som at uddrage kvadratroden af -1. For at komme protesterne i forkøbet havde han udformet afhandlingens indledning som en slags forsvarstale. Blandt andet skrev han:

> "... Man har uden Tvivl holdt det for utilladeligt at forandre noget i Operationernes eengang antagne Forklaring. Og derimod er intet at indvende, saalænge Forklaringen anvendes paa Størrelser i Almindelighed; men i enkelte Tilfælde, naar Størrelsernes egen Natur synes at indbyde til Operationernes nøiere Bestemmelse, og denne med Nytte kan anvendes, bør samme vel ei kaldes utilladelig; ..."

> "... jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; ..."

> "... Dette er Hovedindholdet af denne Afhandling. Anledningen dertil var, at jeg søgte en Methode, hvorved de umulige Operationer kunde undgaaes, og da denne var funden, anvedte jeg samme, for at overbevises om nogle velkiendte Formlers Almindelighed. ..."

Men protesterne udeblev. Sandsynligvis fordi der ikke var nogen, der forstod afhandlingens indhold. Det matematiske niveau i Danmark var dengang for lavt til, at man kunne følge Caspar Wessels abstrakte tanker. Heller ikke fra det store Europa kom der reaktioner. Afhandlingen var nemlig skrevet på dansk, som var totalt uforståeligt for udlandets matematikere. Derfor blev Caspar Wessels beundringsværdige arbejde arkiveret og glemt af alle, indtil det i 1895 dukkede op i en doktordisputats om matematikken i Danmark og Norge. Men da havde den store tyske matematiker, Gauss, forlængst fået æren for at give de komplekse tal et logisk fast grundlag.

DE KOMPLEKSE TALS ARITMETIK.

Inden vi går igang med at regne med de komplekse tal, skal vi se på nogle af egenskaberne ved et legeme. Disse egenskaber er fælles for alle legemer, og derfor også for de rationale tal, de reelle tal og de komplekse tal.

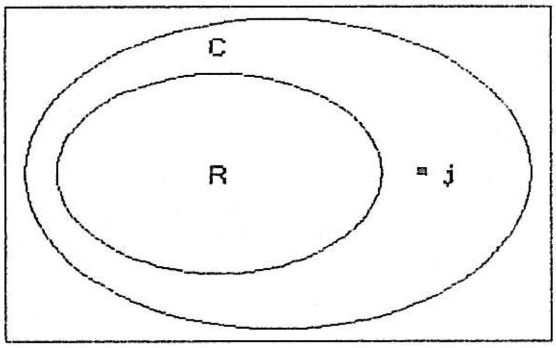
Kortfattet (og lidt upræcist) kan man sige, at en talmængde, M, med to regneoperatorer, + og $\circ$, er et legeme, såfremt følgende seks aksiomer er opfyldt for vilkårlige elementer a, b og c i M:

1) $a+b \in M$ og $a \circ b \in M$
2) $a+b=b+a$ og $a \circ b=b \circ a$
3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ og $(a \circ b) \circ c=a \circ (b \circ c)$
4) $a \circ (b+c)=a \circ b+a \circ c$
5) $0+a=a$ og $1 \circ a=a$
6) $a+(-a)=0$ og $a \circ (1/a)=1$

Det første aksiom siger, at M er <u>stabil</u> over for henholdsvis addition og multiplikation. De næste tre aksiomer kaldes de <u>kommutative</u> regler, de <u>associative</u> regler og den <u>distributive</u> regel. Det femte aksiom siger, at 0 og 1 er <u>neutrale</u> over for henholdsvis addition og multiplikation. Det sidste aksiom udtrykker, at $-a$ og $1/a$ er henholdsvis det <u>modsatte</u> tal og det <u>reciprokke</u> tal til a. For at kunne tale om det reciprokke tal til a, må man dog forudsætte, at $a \neq 0$.

Man kan bevise gyldigheden af alle de sædvanlige regneregler ud fra disse få aksiomer. Der tænkes i denne forbindelse blandt andet på reglerne for forlængelse og forkortelse af brøker, samt reglerne for, hvorledes man multiplicerer to flerledede størrelser. Traditionen tro vil vi ofte skrive ab, når vi i virkeligheden mener $a \circ b$. På samme måde kan vi overføre andre traditionelle skrivemåder til et vilkårligt legeme. For eksempel kan vi i kraft af de associative regler skrive abc i stedet for a(bc) eller (ab)c, og vi kan skrive a+b+c i stedet for a+(b+c) eller (a+b)+c.

Som nævnt i kapitel 1 udgør de komplekse tal et legeme, som er en udvidelse af de reelle tal, og som indeholder en løsning til ligningen $x^2+1=0$. Det betyder, at der findes et komplekst tal, j, således at $j^2=-1$. Det er indlysende, at j ikke kan tilhøre de reelle tal; thi intet reelt tal har den nævnte egenskab. Derfor må j være et af de nye tal. Bogstavet C anvendes som betegnelse for mængden af de komplekse tal, på samme måde som R betegner mængden af de reelle tal.



Da C er et legeme, er C stabil over for addition og multiplikation. Da desuden R er en delmængde af C, fås:

$$\begin{aligned} a\in R,\ b\in R,\ j\in C &\Rightarrow a\in C,\ b\in C,\ j\in C \\ &\Rightarrow a\in C,\ jb\in C \\ &\Rightarrow a+jb\in C \end{aligned}$$

Heraf ses, at ethvert udtryk af formen a+jb, med $a\in R$ og $b\in R$, er et komplekst tal. I appendiks II er der gjort rede for, at de komplekse tal ikke indeholder andre elementer end disse. Det vil sige:

$$C = \{a+jb \mid a\in R, b\in R\}.$$

Vi kan umiddelbart gå i gang med at udføre simple beregninger med komplekse tal; thi alle de sædvanlige regneregler er gyldige. Stort set kan man behandle de komplekse tal præcis som man behandler de reelle tal, hvis man blot husker på, at j^2 er lig med -1. Desuden skal man passe lidt på med at udnytte egenskaber, der knytter sig til, at de reelle tal kan placeres på en talakse. Dette er ikke tilfældet for de komplekse tal.

Summen af to komplekse tal.

Som eksempel på addition af komplekse tal, finder vi summen af tallene 3+2j og -7+j:

$$
\begin{aligned}
(3+2j)+(-7+j) &= 3+2j-7+j \\
&= 3-7+2j+j \\
&= -4+3j
\end{aligned}
$$

Øvelse 1. Udregn følgende summer:

a) $(4-6j)+(3+4j)$ b) $(1+4j)+(1-4j)$

c) $(8+6j)+(-8-j)$ d) $(-2+3j)+(½j)$

Differensen mellem to komplekse tal.

Subtraktion foregår på samme måde som addition, bortset fra at man skal huske at skifte fortegn ved ophævelse af minusparentesen. Vi finder differensen mellem for eksempel 5-4j og 9+2j således:

$$
\begin{aligned}
(5-4j)-(9+2j) &= 5-4j-9-2j \\
&= 5-9-4j-2j \\
&= -4-6j
\end{aligned}
$$

Øvelse 2. Udregn følgende differenser:

a) $(3+2j)-(2+3j)$ b) $(1+4j)-(1-4j)$

c) $(12+5j)-(-3+8j)$ c) $(3+0j)-(0+5j)$

Produktet af to komplekse tal.

Vi kan beregne produktet af 3-2j og 4+7j ved at bruge den fremgangsmåde, man plejer at anvende ved multiplikation af to flerledede størrelser:

$$\begin{aligned}(3-2j)\cdot(4+7j) &= 3\cdot 4+3\cdot 7j-2j\cdot 4-2j\cdot 7j\\ &= 12+21j-8j-14j^2\\ &= 12+21j-8j+14\\ &= 12+14+(21-8)j\\ &= 26+13j\end{aligned}$$

Øvelse 3. Udregn følgende produkter:

a) $(2+3j)\cdot(1+4j)$ b) $(1+4j)\cdot(1-4j)$

c) $(5+2j)\cdot(5+2j)$ d) $(3-8j)\cdot j$

Kvotienten mellem to komplekse tal.

Det er lidt mere besværligt at beregne kvotienten mellem to komplekse tal. For at gennemføre udregningen er det nødvendigt med et lille trick, der består i at gøre nævneren reel. Det klares ved at forlænge brøken med et passende komplekst tal:

$$\begin{aligned}\frac{-3+7j}{1+5j} &= \frac{(-3+7j)(1-5j)}{(1+5j)(1-5j)}\\ &= \frac{-3\cdot 1-3\cdot(-5j)+7j\cdot 1+7j\cdot(-5j)}{1^2-(5j)^2}\\ &= \frac{-3+15j+7j-35(j^2)}{1-25(j^2)}\\ &= \frac{-3+15j+7j+35}{1+25}\\ &= \frac{-3+35+15j+7j}{26}\\ &= \frac{32+22j}{26}\\ &= \frac{16+11j}{13}\\ &\simeq 1,231 + 0,8462j\end{aligned}$$

Øvelse 4. Beregn følgende kvotienter:

a) $\frac{2+3j}{3+4j}$ b) $\frac{-1+j}{-1-j}$

c) $\frac{1}{j}$ d) $\frac{11+7j}{j}$

Øvelse 5. I det ovenstående har vi gjort brug af følgende egenskab: Hvis a og b er reelle tal, så er tallet $(a+jb)\cdot(a-jb)$ også reelt. Bevis dette.

Øvelse 6. Den sædvanlige regel for, hvorledes man opløfter en toleddet størrelse til anden potens, gælder også for komplekse tal; thi den er en simpel konsekvens af de kommutative regler, de associative regler og den distributive regel. Benyt denne regel til at udregne følgende potenser:

a) $(3+5j)^2$ b) $(7-j)^2$

Øvelse 7. Gør rede for, at $j^{20}=1$, og at $j^7=-j$. Kan man sige noget generelt om j^n, hvor $n\in Z$?

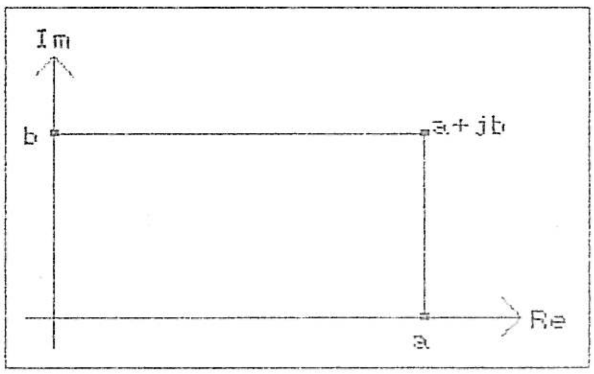
Vi har nu set nogle få eksempler på simple regnestykker med komplekse tal. Forhåbentlig har de vist, at næsten alle udregninger følger de regler, man er vant til fra de reelle tal. Tilbage er så spørgsmålet om, hvad j egentlig er for noget. Det eneste man kan svare på dette spørgsmål er, at j er en løsning til ligningen $x^2=-1$. Med tiden får man dog næsten den samme fortrolighed med j, som man har med tallet 1. Det er udelukkende et spørgsmål om tilvænning.

DEN KOMPLEKSE TALPLAN

Når man skal forestille sig de reelle tal, er det nyttigt at tænke på dem som liggende på en talakse. Ethvert punkt på talaksen svarer til et reelt tal, og ethvert reelt tal svarer til et punkt på talaksen. Denne egenskab kan man udtrykke ved at sige, at der hersker en en-entydig forbindelse mellem de reelle tal og punkterne på talaksen. Med til dette billede af de reelle tal hører alle de egenskaber, der har med tallenes ordning at gøre. Hvis a og b er to reelle tal, så er enten a=b eller a<b eller a>b. Andre muligheder gives ikke af den simple grund, at talaksen er éndimensional. Desuden kan man tale om intervaller inden for de reelle tal. At dette er muligt, skyldes igen de reelle tals én-dimensionale natur.

Men det er ikke muligt at placere de komplekse tal på en talakse, fordi ethvert punkt på talaksen allerede er optaget af et reelt tal. Derfor er det heller ikke muligt at overføre ordnings- eller intervalbegreberne til de komplekse tal. Man kan altså ikke tale om, at et komplekst tal er større eller mindre end et andet komplekst tal. Ligeledes er det meningsløst at tale om mængden af alle de komplekse tal, der ligger imellem to givne komplekse tal. Det kræver lidt øvelse at arbejde med et legeme, der ikke er ordnet.

Selvom de komplekse tal ikke lader sig placere på en talakse, kan vi danne os et ganske godt billede af dem. Men så må vi benytte os af to dimensioner. Et komplekst tal, a+bj, hvor $a \in R$ og $b \in R$, kan afsættes som et punkt i et almindeligt todimensionalt koordinatsystem, idet a opfattes som førstekoordinaten og b som andenkoordinaten. Vektoren (a, b) kaldes <u>stedvektoren</u> for a+jb.

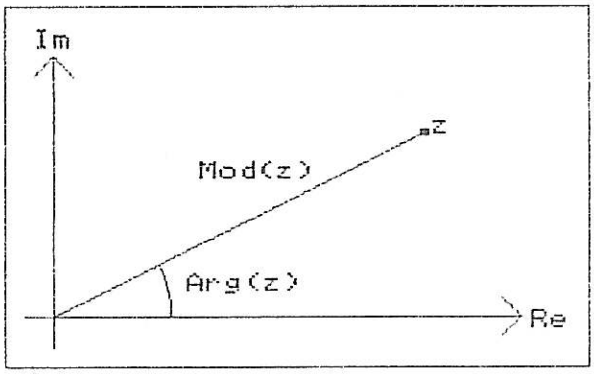


Tallet j blev i starten betragtet som et "mystisk" tal, der kun havde liv i kraft af menneskets forestillingsevne (imagination). Derfor har man talt om j som <u>den imaginære enhed,</u> og man sagde, at b angav <u>imaginærdelen</u> af a+jb. I modsætning hertil kaldtes a for <u>realdelen</u> af a+jb. Disse betegnelser lever videre i den moderne terminologi på trods af, at man nu har vænnet sig så meget til de komplekse tal, at man ikke længere opfatter dem som værende mere mystiske end de reelle tal. De forkortede skrivemåder ser således ud:

$$\mathrm{Re}(a+jb) = a$$
$$\mathrm{Im}(a+jb) = b$$

Koordinatsystemets første- og andenakse kaldes henholdsvis <u>den reelle akse</u> og <u>den imaginære akse</u>. Hele talplanen hedder <u>den komplekse talplan</u>. Ethvert punkt i talplanen svarer til et komplekst tal, og omvendt. Den komplekse talplan kommer derfor til at spille samme rolle for de komplekse tal, som talaksen spiller for de reelle tal.

Lad z være et vilkårligt komplekst tal. For at angive værdien af z, er det nødvendigt, at angive to reelle tal, for eksempel realdelen og imaginærdelen. Imidlertid er det ofte praktisk at angive z ved hjælp af to andre reelle tal, nemlig stedvektorens længde og retningsvinkel. Længden af z's stedvektor kaldes <u>modulus</u> af z og betegnes Mod(z) eller |z|.



Stedvektorens retningsvinkel kaldes <u>argumentet</u> af z og betegnes med Arg(z).

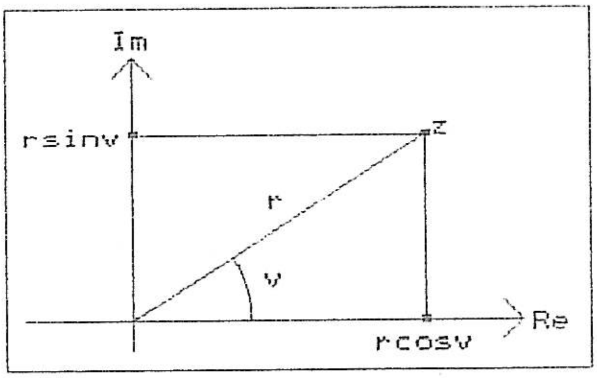
Argumentet kan angives i enten grader eller radianer. Dog er det kun radianmålet, der er brugbart i forbindelse med de komplekse funktioner, vi senere skal beskæftige os med. Derfor vil vi ofte angive argumentet i radianer. Hvis et komplekst tal har argumentet v, er det også korrekt at påstå, at det har argumentet v+2π eller v+4π eller v−2π og så videre. Hvis z er lig med nul, er z's stedvektor lig med nulvektoren, og så er det meningsløst, at tale om retningsvinklen. For at undgå problemer i dette specielle tilfælde fastsætter vi, at Arg(0)=0.

Hvis man kender et komplekst tals modulus og argument, kan man beregne dets realdel og imaginærdel ved hjælp af nedenstående sætning.

<u>Sætning 1.</u> For et vilkårligt komplekst tal z gælder:

(') Re(z) = Mod(z)cos(Arg(z))
(") Im(z) = Mod(z)sin(Arg(z))

<u>Bevis:</u> Hvis en vektor har længden r og retningsvinklen v, så er første- og andenkoordinaten lig med henholdsvis rcosv og rsinv. Når dette anvendes på stedvektoren for z, får man direkte formlerne (') og ("). Hermed er sætningen bevist.



Hvis z har modulus r og argument v, kan sætningens resultat udtrykkes ved:

z = rcosv+jrsinv = r(cosv+jsinv)

<u>Øvelse 1.</u> Omskriv det komplekse tal, z, til formen, z=a+jb, i hvert af de følgende fire tilfælde:

a) Mod(z)=7, Arg(z)=π/6. b) Mod(z)=7, Arg(z)=0.
c) Mod(z)=1, Arg(z)=π/2. d) Mod(z)=1, Arg(z)=−π.

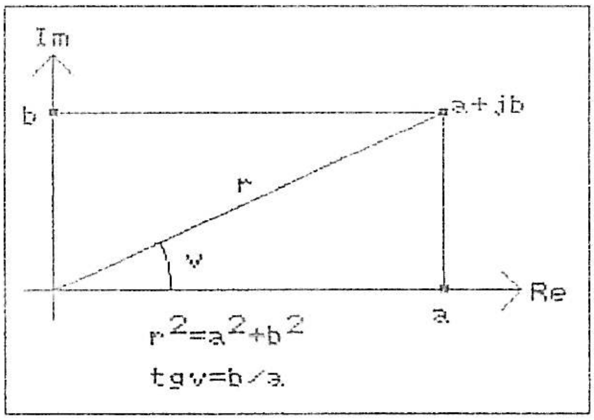
Den næste sætning giver, i modsætning til den foregående, nogle formler, der kan anvendes, når man kender et komplekst tals real- og imaginærdel, men ønsker at beregne dets modulus og argument.

<u>Sætning 2.</u> For ethvert komplekst tal z gælder:

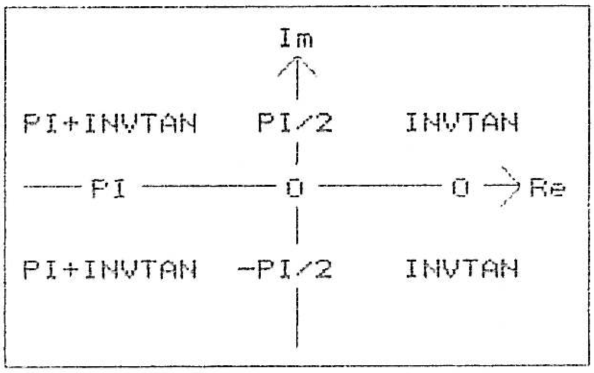
(') $(\mathrm{Mod}(z))^2 = (\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$

(") $\tan(\mathrm{Arg}(z)) = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)$ (forudsat $\mathrm{Re}(z)<>0$)

<u>Bevis:</u> Hvis en vektor har koordinaterne (a, b), så er kvadratet på dens længde lig med a^2+b^2, og tangens til dens retningsvinkel er b/a (forudsat $a\neq0$). Når dette anvendes på stedvektoren for z følger formlerne (') og (") direkte. Dette beviser sætningen.



Når man bruger formlen (") til bestemmelse af argumentet for et komplekst tal, skal man huske at tage hensyn til z's placering i forhold til talaksene. Først udregnes Im(z)/Re(z). Derefter kan man bruge lommeregnerens INV TAN til at finde en vinkel. Denne vinkel er dog kun det korrekte argument, såfremt Re(z) er positiv. Det skyldes, at lommeregneren forudsætter, at den søgte vinkel ligger mellem $-\pi/2$ og $+\pi/2$. Hvis Re(z) er negativ, skal vinklen korrigeres ved addition af π. Dette er søgt illustreret i hosstående skematiske oversigt.



Øvelse 2. Beregn Mod(z) og Arg(z) i hvert af de følgende ni tilfælde:

a) $z = 3+5j$ b) $z = 3-5j$ c) $z = -3+5j$

b) $z = -3-5j$ c) $z = -9j$ d) $z = -9$

e) $z = 9$ f) $z = 0$ g) $z = 9j$

Vi skal nu se på, hvordan addition, subtraktion, multiplikation og division tager sig ud i den komplekse talplan. De næste to sætninger handler om henholdsvis addition og subtraktion.

Sætning 3. Man adderer to komplekse tal ved at addere realdelene og imaginærdelene hver for sig. Det vil sige: For vilkårlige komplekse tal, z og w, gælder:

$$(') \quad Re(z+w) = Re(z)+Re(w)$$

$$('') \quad Im(z+w) = Im(z)+Im(w)$$

Bevis: Ved at omskrive z og w til deres real- og imaginærdele fås under anvendelse af den kommutative og den associative regel for addition samt den distributive regel, at:

$$\begin{aligned} z+w &= (Re(z)+jIm(z))+(Re(w)+jIm(w)) \\ &= Re(z)+jIm(z)+Re(w)+jIm(w) \\ &= (Re(z)+Re(w))+j(Im(z)+Im(w)) \end{aligned}$$

Heraf ses, at:

$$Re(z+w) = Re(z)+Re(w)$$

$$Im(z+w) = Im(z)+Im(w)$$

Dette beviser sætningen.

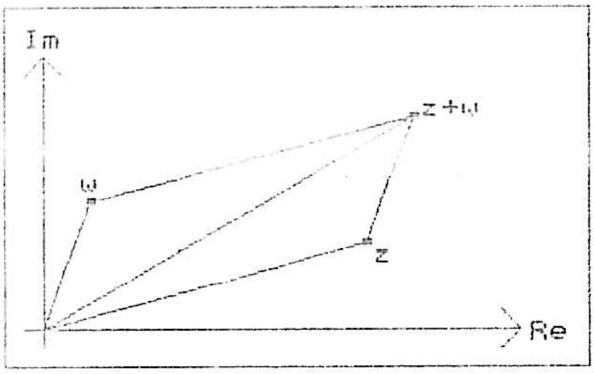
Sætning 4. Man subtraherer to komplekse tal ved at subtrahere realdelene og imaginærdelene hver for sig. Det vil sige: For vilkårlige komplekse tal, z og w gælder:

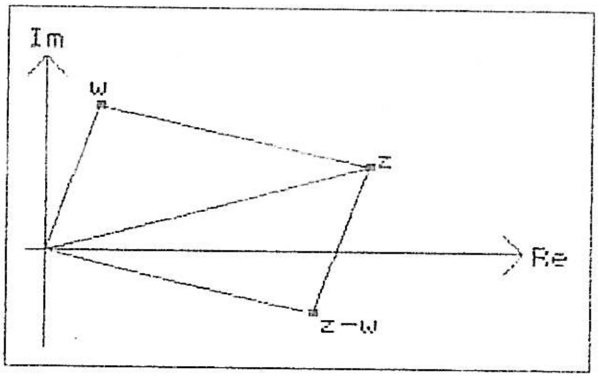
(') $Re(z-w) = Re(z)-Re(w)$

(") $Im(z-w) = Im(z)-Im(w)$

Bevis: Beviset føres på en måde, der minder meget om beviset for sætning 3. Det overlades til læseren at gennemføre det.

Ifølge de to foregående sætninger er addition og subtraktion af komplekse tal helt analog med addition og subtraktion af stedvektorer:





En tilsvarende analogi findes ikke for multiplikation og division af komplekse tal; thi multiplikation og division er ikke defineret i mængden af vektorer. Alligevel kan man give en simpel beskrivelse af multiplikation og division i den komplekse talplan. Derom handler de næste to sætninger.

Sætning 5. Man multiplicerer to komplekse tal ved at multiplicere deres moduli og addere deres argumenter. Det vil sige: For vilkårlige komplekse tal, z og w gælder:

(') $Mod(z \cdot w) = Mod(z) \cdot Mod(w)$

(") $Arg(z \cdot w) = Arg(z)+Arg(w)$

Bevis: Af praktiske grunde indfører vi følgende forkortelser:

$$\mathrm{Mod}(z)=r,\quad \mathrm{Arg}(z)=u$$
$$\mathrm{Mod}(w)=s,\quad \mathrm{Arg}(w)=v$$

Så kan z og w ifølge bemærkningen efter sætning 1 skrives på formen:

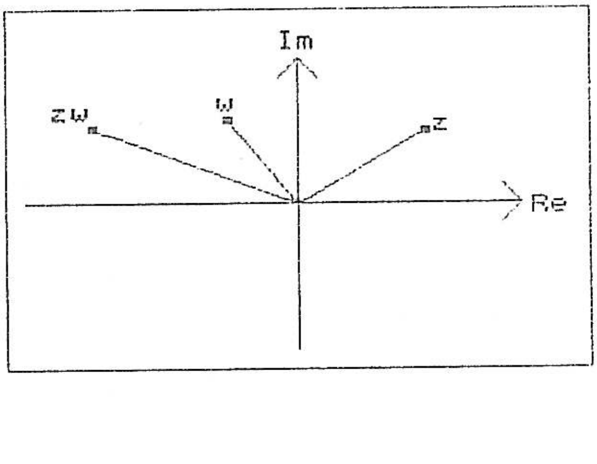
$$z = r(\cos u+j\sin u)$$
$$w = s(\cos v+j\sin v)$$

Heraf fås ved multiplikation:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= r(\cos u+j\sin u)\cdot s(\cos v+j\sin v) \\ &= rs(\cos u+j\sin u)(\cos v+j\sin v) \\ &= rs(\cos u\cdot\cos v+j\cos u\cdot\sin v+j\sin u\cdot\cos v-\sin v\cdot\sin u) \\ &= rs(\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v)+jrs(\cos u\cdot\sin v+\sin u\cdot\cos v) \\ &= rs\cdot\cos(u+v)+jrs\cdot\sin(u+v) \\ &= rs(\cos(u+v)+j\sin(u+v)) \end{aligned}$$

Undervejs i denne udregning er benyttet et par velkendte trigonometriske formler. Af resultatet ses direkte, at $z\cdot w$ har modulus $rs=\mathrm{Mod}(z)\cdot\mathrm{Mod}(w)$ og argument $u+v=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w)$. Dette afslutter beviset for sætningen.

Eksempel 1. Hvis z har modulus 2 og argument 30°, og hvis w har modulus 1,5 og argument 130°, så har zw modulus $2\cdot1,5=3$ og argument $30°+130°=160°$. Dette er illustreret i hosstående figur.



Sætning 6. Man dividerer to komplekse tal ved at dividere deres moduli og subtrahere deres argumenter. Det vil sige: For vilkårlige komplekse tal, z og w, med $w \neq 0$, gælder:

(') $\mathrm{Mod}(z/w) = \mathrm{Mod}(z)/\mathrm{Mod}(w)$

(") $\mathrm{Arg}(z/w) = \mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(w)$

Bevis: Først beregner vi modulus og argumentet af 1/w. Antag, at Mod(w)=r, og Arg(w)=v. Så gælder:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w} &= \frac{1}{r(\cos v+j\sin v)} \\
&= \frac{\cos v-j\sin v}{r(\cos v+j\sin v)(\cos v-j\sin v)} \\
&= \frac{\cos v-j\sin v}{r(\cos^2 v-j\cos v\cdot\sin v+j\sin v\cdot\cos v-j^2\sin^2 v)} \\
&= \frac{\cos v-j\sin v}{r(\cos^2 v+\sin^2 v)} \\
&= \frac{\cos v-j\sin v}{r} \\
&= \frac{\cos(-v)+j\sin(-v)}{r} \\
&= (1/r)(\cos(-v)+j\sin(-v))
\end{aligned}
$$

Heraf ses, at:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mod}(1/w) &= 1/r = 1/\mathrm{Mod}(w) \\
\mathrm{Arg}(1/w) &= -v \;\; = -\mathrm{Arg}(w)
\end{aligned}
$$

Ved anvendelse af dette resultat samt sætning 5 fås dels modulus af z/w:

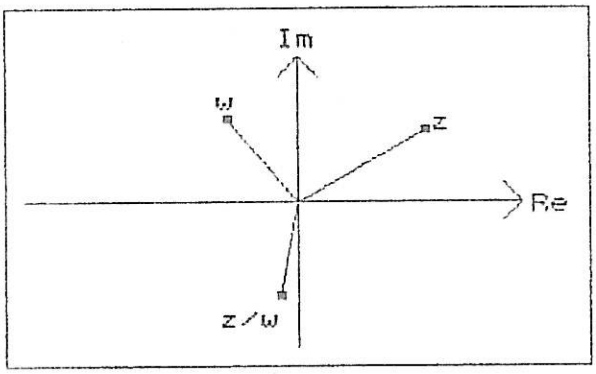
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mod}(z/w) &= \mathrm{Mod}(z(1/w)) \\
&= \mathrm{Mod}(z)\cdot\mathrm{Mod}(1/w) \\
&= \mathrm{Mod}(z)/\mathrm{Mod}(w)
\end{aligned}
$$

og dels argumentet af z/w:

$$\begin{aligned} Arg(z/w) &= Arg(z(1/w)) \\ &= Arg(z)+Arg(1/w) \\ &= Arg(z)-Arg(w) \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

<u>Eksempel 2.</u> Hvis z har modulus 2 og argument 30°, og hvis w har modulus 1,5 og argument 130°, så har z/w modulus 2/1,5≈1,333 og argument 30°-130°=-100°. Dette er illustreret i hosstående figur.



<u>Øvelse 3.</u> Lad z være et komplekst tal med Mod(z)=r og Arg(z)=v. Find modulus og argument af j∘z.

<u>Øvelse 4.</u> Lad z være et komplekst tal med Mod(z)=r og Arg(z)=v. Find modulus og argument af z^2.

<u>Øvelse 5.</u> »De Moivres sætning« siger, at hvis $v \in R$ og $n \in Z_+$, så gælder:

$$(\cos v + j\sin v)^n = \cos(nv) + j\sin(nv).$$

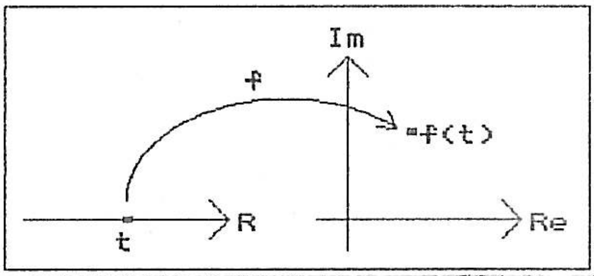
Bevis denne sætning.

<u>Øvelse 6.</u> Benyt De Moivres sætning med n=2 til at bevise de velkendte formler:

$$\begin{aligned} \cos(2v) &= \cos^2 v + \sin^2 v \\ \sin(2v) &= 2\cos v \cdot \sin v \end{aligned}$$

FUNKTIONER FRA DE REELLE TAL TIL DE KOMPLEKSE TAL

Lad f være en funktion, som afbilder R ind i C. Hvis t tilhører R, er f(t) et element i C. Hvis vi forestiller os, at t gennemløber de reelle tal, vil f(t) gennemløbe værdimængden for f. Denne værdimængde er en delmængde af C, og vil ofte udgøre en kurve i den komplekse talplan. I en vis forstand kan man opfatte f som en "køreplan" for et punkt, der bevæger sig i den komplekse talplan. Placeringen af f(t) angiver da beliggenheden af punktet til tiden t.



I det følgende skal vi arbejde med sådanne funktioner. Fælles for dem er, at deres definitionsmængde er R (eller en delmængde af R), og at deres funktionsværdier tilhører C. For korthedens skyld vil vi kalde dem <u>komplekse funktioner</u>, selvom denne betegnelse oftere anvendes på funktioner fra C til C.

<u>Øvelse 1.</u> Lad f, g, h og i være de komplekse funktioner, der er fastlagt ved:

$$f(t) = t + jt^2, \quad t \in R.$$
$$g(t) = t^2 + jt, \quad t \in R$$
$$h(t) = \cos t + j\sin t, \quad t \in R$$
$$i(t) = \cos t, \quad t \in R$$

Giv, for hver af disse funktioner, en beskrivelse af værdimængden opfattet som en kurve i den komplekse talplan.

Definition 1. En kompleks funktion, f, giver anledning til fire reelle funktioner, Re(f), Im(f), Mod(f) og Arg(f), som defineres således:

$$\mathrm{Re}(f)(t) = \mathrm{Re}(f(t))$$
$$\mathrm{Im}(f)(t) = \mathrm{Im}(f(t))$$
$$\mathrm{Mod}(f)(t) = \mathrm{Mod}(f(t))$$
$$\mathrm{Arg}(f)(t) = \mathrm{Arg}(f(t))$$

Desværre er det ikke muligt at tegne grafen for en kompleks funktion, f. Det skyldes, at funktionsværdierne, f(t), tilhører C, som er et todimensionalt rum. Et punkt, (t,f(t)), på grafen for f befinder sig derfor i et tredimensionalt rum. Selvfølgelig kunne man modellere grafen i et tredimensionalt rum, men de praktiske vanskeligheder ville være store. Imidlertid kan man udmærket tegne grafen for en eller flere af funktionerne Re(f), Im(f), Mod(f) og Arg(f), som jo er ganske normale reelle funktioner. Ud fra graferne for disse kan man med lidt øvelse danne sig et indtryk af, hvorledes selve funktionen, f, opfører sig. Ofte er det især graferne for Mod(f) og Arg(f), der giver gode indtryk.

Øvelse 2. Lad f være den komplekse funktion, der er fastlagt ved:

$$f(t) = \cos t + j\sin t, \quad t \in R.$$

Find funktionsudtrykkene for Mod(f) og Arg(f), og tegn graferne for disse funktioner. Prøv derefter at lave en todimensional perspektivskitse af den tredimensionale graf for f.

Inden vi går i gang med at opbygge en infinitesimalregning for komplekse funktioner, skal vi bevise et par nyttige sætninger, som drejer sig om modulus. Det er tidligere nævnt, at hvis $z \in C$, så kan Mod(z) også skrives som $|z|$. Denne skrivemåde er endnu ikke retfærdiggjort, thi hvad nu, hvis imaginærdelen af z er lig med nul? Så kan z med rette opfattes som et reelt tal. I den situation kan man komme i tvivl om, hvorvidt $|z|$ skal forstås som modulus af z eller som den numeriske værdi af z. Nedenstående sætning siger imidlertid, at de to mulige opfattelser er identiske, således at den beskrevne tvivl er ubegrundet.

Sætning 1. Hvis $z \in R$, gælder $Mod(z)=|z|$, hvor $|z|$ betegner den sædvanlige reelle numeriske værdi af z.

Bevis: Da $z \in R$, er $Re(z)=z$ og $Im(z)=0$. Heraf fås:

$$
\begin{aligned}
& (Mod(z))^2 = (Re(z))^2+(Im(z))^2 \\
\Rightarrow\ & (Mod(z))^2 = z^2+0^2 \\
\Rightarrow\ & (Mod(z))^2 = z^2 \\
\Rightarrow\ & Mod(z) = |z|
\end{aligned}
$$

Hermed er sætningen bevist.

Modulusbegrebet er ifølge sætning 1 en udvidelse af det reelle begreb, numerisk værdi. Ydermere viser det sig, at mange af de egenskaber, der kendetegner den reelle numeriske værdi, går i arv til den komplekse modulus. For vilkårlige reelle tal, t og s, gælder som bekendt:

(1) $|t| \geq 0$

(2) $|t|=0 \Leftrightarrow t=0$

(3) $|ts|=|t||s|$

(4) $|t+s| \leq |t|+|s|$

Den næste sætning viser, at disse regler også er gyldige for den komplekse modulus.

<u>Sætning 2.</u> For vilkårlige komplekse tal, z og w gælder:

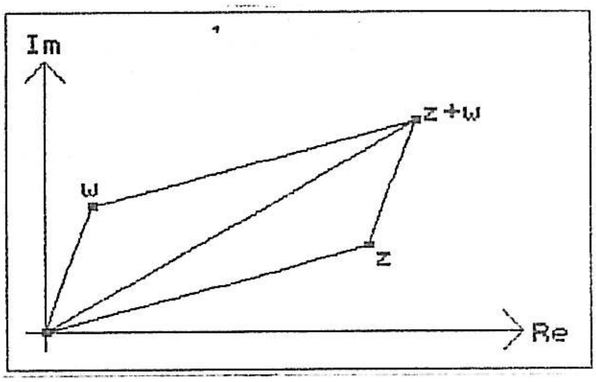
(1) $Mod(z) \geq 0$

(2) $Mod(z)=0 \Leftrightarrow z=0$

(3) $Mod(zw)=Mod(z)Mod(w)$

(4) $Mod(z+w) \leq Mod(z)+Mod(w)$

<u>Bevis:</u> De to første regler er meget lette at bevise, og den tredie regel er tidligere bevist. Derfor nøjes vi med at bevise den fjerde regel. Dette gøres lettest ved hjælp af nogle geometriske betragtninger. Hosstående figur illustrerer additionen af z og w. Trekanten, hvis hjørner befinder sig i tallene 0, z og z+w, har sidelængderne Mod(z), Mod(w) og Mod(z+w). Da summen af to sidelængder i en trekant altid er større end eller lig med den tredie sidelængde, må summen af Mod(z) og Mod(w) være større end eller lig med Mod(z+w). Dette beviser rigtigheden af (4). Denne regel kaldes af gode grunde trekantsuligheden.



De to foregående sætninger viser, at modulus er en generaliseret udgave af den sædvanlige reelle numeriske værdi, og at modulus i al væsentlighed har de samme egenskaber som den reelle numeriske værdi. Dette kommer os til nytte, når vi nu skal til at opbygge en infinitesimalregning for komplekse funktioner.

Infinitesimalregningen dækker blandt andet over begreberne grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet. Disse begreber, som allerede er kendt fra den reelle funktionsanalyse, resumeres nedenfor.

Lad f være en reel funktion, og lad $t_0 \in R$ og $a \in R$. Hvis der for ethvert $\epsilon>0$ findes et $\delta>0$ således at:

$$|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-a|<\epsilon,$$

siges f(t) at have grænseværdien a for t gående mod t_0. Dette skrives

$$f(t) \to a \text{ for } t \to t_0.$$

Hvis grænseværdien falder sammen med funktionsværdien, d.v.s. hvis

$$f(t) \to f(t_0) \text{ for } t \to t_0,$$

siges f at være kontinuert i t_0. Hvis der yderligere findes et $\alpha \in R$ således at

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \to \alpha \text{ for } t \to t_0,$$

siges f at være differentiabel i t_0 med differentialkvotienten α. Dette skrives $f'(t_0)=\alpha$.

Det fremgår af ovenstående resumé, at begreberne kontinuitet og differentiabilitet bygger på grænseværdibegrebet. For at udvide begreberne kontinuitet og differentiabilitet til også at omfatte komplekse funktioner, er det altså nok at generalisere grænseværdibegrebet, og derefter lade definitionerne på kontinuitet og differentiabilitet stå (næsten) uændrede.

Af definitionen ses, at grænseværdibegrebet er defineret ved hjælp af de numeriske værdier af $t-t_0$ og $f(t)-a$. Da vi allerede råder over en generaliseret version af den reelle numeriske værdi, nemlig modulus, kan vi blot erstatte numerisktegnet omkring $f(t)-a$ med modulus. Dette er begrundelserne for de følgende tre definitioner:

<u>Definition 2.</u> Lad f være en kompleks funktion, og lad $t_0 \in R$, og $z \in C$. Hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at

$$|t-t_0|<\delta \Rightarrow \mathrm{Mod}(f(t)-z)<\epsilon,$$

siges f(t) at have grænseværdien z for t gående mod t_0. Dette skrives:

$$f(t) \rightarrow z \text{ for } t \rightarrow t_0.$$

<u>Definition 3.</u> Lad f være en kompleks funktion, og lad $t_0 \in R$. Hvis

$$f(t) \rightarrow f(t_0) \text{ for } t \rightarrow t_0,$$

siges f at være kontinuert i t_0.

<u>Definition 4.</u> Lad f være en kompleks funktion, og lad $t_0 \in R$. Hvis der findes et $\alpha \in C$, således at

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \rightarrow \alpha \text{ for } t \rightarrow t_0$$

siges f at være differentiabel i t_0 med differentialkvotienten α. Dette skrives $f'(t_0)=\alpha$.

I ovenstående definitioner er det stiltiende forudsat, at f er defineret i hele R. Den eneste begrundelse for dette er overskuelighedshensyn. Man kunne lige så godt forudsætte, at f var defineret på et delinterval af R, og at t_0 tilhørte dette delinterval. I definitionen for grænseværdi behøvede man endda kun at forudsætte, at f var defineret i en udprikket omegn omkring t_0.

Hermed har vi fået klaret det definitionsmæssige grundlag for den komplekse infinitesimalregning. Det skulle fremgå, at definitionerne ligger meget tæt op ad de tilsvarende definitioner i den reelle infinitesimalregning. I praksis er der faktisk ingen forskel. Alle de regler, man har udviklet inden for den reelle infinitesimalregning, er også gyldige i den komplekse infinitesimalregning. En undersøgelse (som vi springer over) af beviserne for disse regler viser nemlig, at de alle kan føres tilbage til egenskaberne ved det reelle begreb, numerisk værdi. Ifølge sætning 2 besidder modulus de samme egenskaber. Det vil sige, at beviserne for reglerne i den reelle infinitesimalregning kan bruges (næsten uændret) som beviser for de tilsvarende regler i den komplekse infinitesimalregning.

Herefter kan vi for eksempel tillade os at benytte alle de sædvanlige differentiationsregneregler i forbindelse med differentiation af komplekse funktioner. Hvis f og g er to differentiable komplekse funktioner, er såvel f+g som f-g og f∘g differentiable komplekse funktioner, og

(1) $(f+g)' = f'+g'$

(2) $(f-g)' = f'-g'$

(3) $(f\cdot g)' = f'\cdot g+f\cdot g'$.

Hvis man yderligere forudsætter, at $g(t)\neq 0$ for alle t i et interval, så er f/g differentiabel i dette interval, og

(4) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g'\cdot f-g\cdot f'}{g^2}$$

Reglen for differentiation af sammensatte funktioner kommer i den komplekse infinitesimalregning til se således ud: Lad f være en kompleks funktion, og lad h være en reel funktion, således at værdimængden for h er indeholdt i definitionsmængden for f. Hvis f og h er differentiable, er f∘h en differentiabel kompleks funktion, og

(5) $(f\circ h)'(t) = f'(h(t))\cdot h'(t)$

Øvelse 3. Differentiér hver af de følgende komplekse funktioner:

$$f(t) = t+jt^2$$
$$g(t) = (t+jt^2)(1+3jt)$$
$$h(t) = 3(t+1)+j\sin(t^2+4t-8)$$
$$i(t) = \frac{2t+1+4jt}{5t+2j}$$

Øvelse 4. Gør rede for, at funktionen

$$f(t) = \cos t+j\sin t$$

tilfredsstiller differentialligningen

$$f'(t) = jf(t).$$

DEN KOMPLEKSE EKSPONENTIALFUNKTION

En vikårlig reel eksponentialfunktion har et funktionsudtryk af formen

$$f(t) = e^{kt},$$

hvor $k \in R \setminus \{0\}$. Sådanne funktioner er uundværlige, når man skal beskrive visse typer af naturfænomener, for eksempel radioaktivt henfald eller biologisk vækst.

Imidlertid ville anvendelsesområdet være meget større, hvis k ikke nødvendigvis skulle være et reelt tal. Erfaringen viser nemlig, at hvis man blot kunne tillade k at være lig med j, så ville man være i stand til at give en elegant beskrivelse af endnu flere fænomener. Senere skal vi se, hvorledes dette praktiseres inden for vekselstrømsteorien. Men først skal vi koncentrere os om at tillægge funktionen

$$f(t) = e^{jt}$$

en fornuftig mening. I den forbindelse er der mange hensyn at tage. For det første må definitionen af e^{jt} ikke være så restriktiv, at der slet ikke findes nogen funktion, der kan leve op til kravene. For det andet må definitionen heller ikke være så løs, at den tilfredsstilles af mere end én funktion. Hvis dette var tilfældet, ville man ikke være klar over, hvilken af de mulige funktioner, der var tale om. Og endelig, for det tredie, må man kræve, at funktionen, e^{jt}, har alle de væsentlige egenskaber, man er vant til fra de reelle eksponentialfunktioner, e^{kt}, hvor $k \in R \setminus \{0\}$. Det er jo netop disse egenskaber, der gør funktionerne så anvendelige.

For at tage hul på problemet, resumerer vi først, hvad det egentlig er, der karakteriserer en reel eksponentialfunktion. Dette er ikke helt ligetil. Eksponentialfunktionerne har nemlig ikke noget aritmetisk funktionsudtryk, således som tilfældet er med for eksempel andengradspolynomier. Alligevel er det muligt at give en entydig beskrivelse af funktionen, e^{kt}.

<u>Sætning 1.</u> Lad $k \in R \setminus \{0\}$. Funktionen, $f(t)=e^{kt}$, er den eneste funktion, der tilfredsstiller følgende fire krav:

(1) $f: R \to R$

(2) $f(0) = 1$

(3) f er differentiabel

(4) $f' = kf$

<u>Bevis:</u> Fra den reelle funktionsanalyse vides, at funktionen, $f(t)=e^{kt}$, eksisterer, og at den har de fire nævnte egenskaber. Dette vil vi ikke komme nærnere ind på her. For at bevise, at f er den eneste funktion med disse egenskaber, antager vi, at g er en funktion, der har de samme egenskaber. Vi skal så blot bevise, at $g=f$. Det gør vi ved at undersøge funktionen:

$$h(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$$

Ifølge (1) er både f og g defineret i hele R. Da $f(t)=e^{kt} \neq 0$ for alle $t \in R$, er h defineret i hele R. Ifølge (3) er f og g differentiable, og da $f(t) \neq 0$ for alle $t \in R$, er h differentiabel i hele R, og differentialkvotienten i et vilkårligt $t \in R$ er:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}{(f(t))^2} \\ &= \frac{f(t)kg(t)-kf(t)g(t)}{(f(t))^2} \qquad \text{(jvf. egenskab (4))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da $h'(t)=0$ for alle $t \in R$, er h konstant, $h(t)=c$. Konstanten, c, kan beregnes ved anvendelse af egenskab (2):

$$c = \frac{g(t)}{f(t)} \Rightarrow c = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Altså er $h(t)=1$ for alle $t\in R$. Men det betyder, ifølge forskriften for h, at $f(t)=g(t)$ for alle $t\in R$. Hermed er sætningen bevist.

Da de fire egenskaber, der er nævnt i sætning 1, entydigt karakteriserer den reelle eksponentialfunktion, $f(t)=e^{kt}$, må <u>alle</u> egenskaberne ved f på en eller anden måde være indlejret i disse fire. En biolog ville nok udtrykke det på den måde, at de fire egenskaber indeholder funktionens komplette arvemasse. Når vi skal finde en kompleks udgave, e^{jt}, af den reelle eksponentialfunktion, e^{kt}, vil det altså være en god idé, at lede efter en kompleks funktion med de samme fire egenskaber. Vi skal blot i (1) skifte sekundærmængden, R, ud med C, og i (4) erstatte k med j. På den måde overtager den nye funktion hele arvemassen, således at den automatisk får de samme egenskaber som den reelle eksponentialfunktion.

Når man sammenholder øvelse 4 i foregående kapitel med egenskaben (4) i sætning 1, får man en formodning om, at funktionen $f(t)=\cos t+j\sin t$ er en god kandidat til posten som kompleks eksponentialfunktion.

<u>Sætning 2.</u> Funktionen, $f(t)=\cos t+j\sin t$, er den eneste funktion, der tilfredsstiller følgende fire krav:

(1) $f: R \to C$

(2) $f(0)=1$

(3) f er differentiabel

(4) $f'=jf$

<u>Bevis:</u> Først skal det bevises, at f virkelig tilfredsstiller de fire krav. Det er forholdsvis let, at bevise, at f har egenskaberne (1)-(3). Dette overlades til læseren. Endvidere fremgår det af øvelse 4 i foregående kapitel, at f har egenskaben (4). Dernæst skal det bevises, at f er den eneste funktion med de angivne egenskaber. Antag derfor, at g er en

funktion, der også har egenskaberne (1)-(4). Da Mod(f)=1 (jvf. øvelse 2 i foregående kapitel) er $f(t)\neq 0$ for alle $t\in R$. Derfor er funktionen

$$h(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$$

defineret i hele R. På præcis samme måde som i beviset for sætning 1, kan man nu bevise, at $h(t)=1$ for alle $t\in R$. Derfor er $f(t)=g(t)$ for alle $t\in R$. Dette afslutter beviset for sætning 2.

På grund af det nære slætsskab mellem den reelle eksponentialfunktion, e^{kt}, og den komplekse funktion, cost+jsint, kan vi tillade os at benytte de samme betegnelser:

<u>Definition 1.</u> Den komplekse eksponentialfunktion er den funktion, der er fastlagt ved forskriften

$$e^{jt} = \cos t + j\sin t$$

<u>Øvelse 1.</u> Lad r og v være reelle tal med $r\geq 0$. Lad endvidere det komplekse tal z være givet ved $z=re^{jv}$. Find Mod(z) og Arg(z).

<u>Øvelse 2.</u> Omskriv hvert af nedenstående tal til formen a+jb, hvor $a\in R$ og $b\in R$:

1) $e^{j\pi/2}$	2) $e^{j\pi}$	3) $3e^{j\pi/6}$
4) e^{0j}	5) $7e^{j}$	6) $je^{-j\pi/2}$

<u>Øvelse 3.</u> Omskriv hvert af nedenstående tal til formen re^{jv}, hvor $r\in R$, $r\geq 0$ og $v\in R$:

1) 1+j	2) -1	3) 7
4) j	5) 3+4j	6) 0

<u>Øvelse 4.</u> Lad z og w være givet ved henholdsvis $z=2e^{3j}$ og $w=6e^{4j}$. Find Mod(z), Arg(z), Mod(w) og Arg(w). Benyt disse resultater til at finde Mod(zw) og Arg(zw). Skriv til slut zw på formen re^{jv}.

<u>Øvelse 5.</u> Benyt samme fremgangsmåde som i øvelse 3 til at bevise, at for vilkårlige reelle tal, u og v, gælder:

$$e^{ju}e^{jv} = e^{j(u+v)}.$$

Kunne du på forhånd have sagt, at denne formel måtte være gyldig?

<u>Øvelse 6.</u> Gør rede for, at $(e^{jt})'=je^{jt}$.

<u>Øvelse 7.</u> Bevis, at funktionen, $f(t)=e^{jt}$, er en løsning til differentialligningen, $f''=-f$.

<u>Øvelse 8.</u> Differentiér funktionen $f(t) = 7e^{j(3t-2)}$.

REELLE VEKSELSPÆNDINGER OG -STRØMME

En <u>reel vekselspænding</u> er en elektrisk spænding, der varierer med tiden efter en forskrift af formen

$$u(t) = U\cos(\omega t+\phi),$$

hvor $u(t)$ er spændingens værdi til tidspunktet t. Tallene U, ω og ϕ er reelle, og $U \geq 0$, og $\omega > 0$. Enheden for $u(t)$ er volt, og tiden måles i sekunder.

Vekselspændingen er periodisk med en <u>periode</u>, T, der er bestemt ved, at $\omega t+\phi$ vokser med 2π i løbet af tidsrummet T:

$$\begin{aligned} & \omega(t+T)+\phi = \omega t+\phi+2\pi \\ \Rightarrow\ & \omega t+\omega T+\phi = \omega t+\phi+2\pi \\ \Rightarrow\ & \omega T = 2\pi \\ \Rightarrow\ & T = \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

En periode varer altså T sekunder. Antallet af perioder per sekund er derfor $1/T$. Dette tal kaldes vekselspændingens <u>frekvens</u>, f, som har enheden sec^{-1} = Hz = Hertz:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Tallet, ω, som er proportionalt med frekvensen, kaldes <u>vinkelfrekvensen</u>:

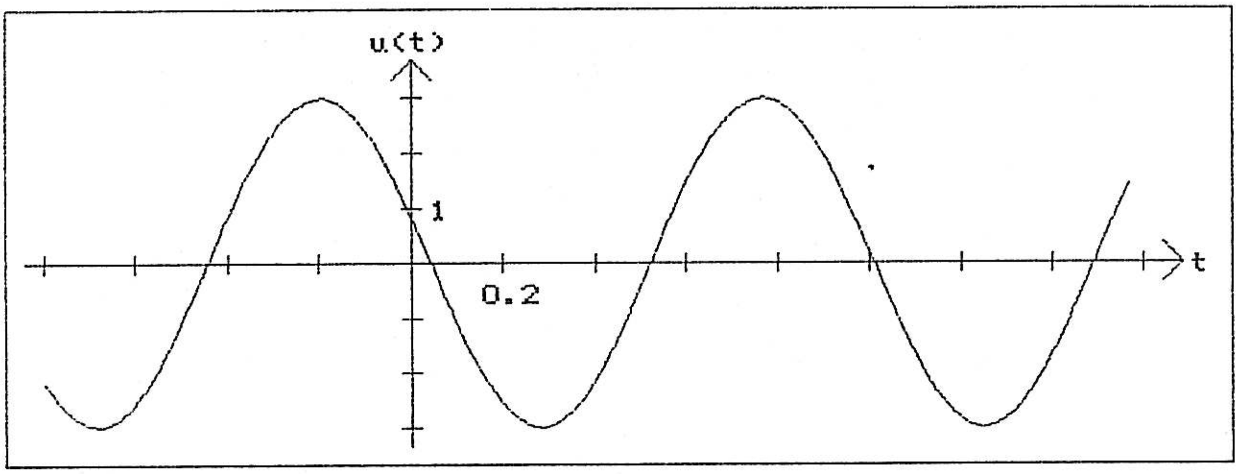
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

I løbet af én periode gennemløber $u(t)$ alle værdier mellem $-U$ og U. Tallet U kaldes vekselspændingens <u>amplitude</u>. Den angives ligesom $u(t)$ i enheden volt:

$$U = \max|u(t)|.$$

Vinklen $\omega t+\phi$ kaldes vekselspændingens <u>øjebliksfase</u>. For $t=0$ har denne værdien ϕ, som derfor kaldes vekselspændingens <u>begyndelsesfase</u>. Såvel øjebliksfasen som begyndelsesfasen angives i radianer.

<u>Øvelse 1.</u> Nedenstående figur viser grafen for en reel
1,20 3,0
vekselspænding. Find vekselspændingens frekvens og amplitude.



<u>Øvelse 2.</u> Omskriv hver af nedennævnte vekselspændinger til formen $u(t) = U\cos(2\pi ft+\phi)$, med $U \geq 0$ og $f>0$:

1) $u(t) = 3\sin(200\pi t)$
2) $u(t) = -\cos(50\pi t)$
3) $u(t) = 3\cos(100\pi t)+4\sin(100\pi t)$

(Hint: Ved omskrivningen af den tredie vekselspænding kan man først beregne længden, r, og retningsvinklen, v, for vektoren $(3,4)$. Derefter erstattes 3 og 4 med henholdsvis $r\cos v$ og $r\sin v$. Til sidst benyttes en formel for $\cos(x-y)$).

<u>Øvelse 3.</u> Den vekselspænding, der findes i en almindelig europæisk stikkontakt angives normalt at have frekvensen 50 Hz og amplituden 220 volt. Men de 220 volt er den såkaldte effektivværdi, U_{EFF}. Sammenhængen mellem den virkelige amplitude, U, og dens effektivværdi, U_{EFF}, er givet ved $U^2=2(U_{EFF})^2$. Opskriv på dette grundlag et udtryk for vekselspændingen.

En <u>reel vekselstrøm</u> er en elektrisk strøm, der varierer med tiden efter en forskrift af formen:

$$i(t) = I\cos(\omega t+\phi),$$

hvor $i(t)$ er vekselstrømmens værdi til tiden t. Tallene, I, ω og ϕ, er reelle, og $I \geq 0$, og $\omega > 0$. På samme måde som tilfældet var med vekselspænding, kan man tale om vekselstrømmens periode, frekvens, vinkelfrekvens, amplitude, øjebliksfase og begyndelsesfase. Den eneste forskel er, at $i(t)$ og I angives i enheden ampère.

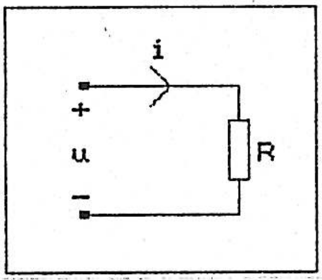
REELLE VEKSELSTRØMSKREDSLØB

Modstande, kondensatorer og spoler udgør de grundlæggende komponenter i passive elektroniske vekselstrømskredsløb. At et kredsløb er passivt betyder, at der ingen steder i kredsløbet forekommer signalforstærkning.

Før vi kan begynde at analysere vekselstrømskredsløb, er vi nødt til dels at se på, hvorledes de tre grundlæggende komponenter fungerer hver for sig, og dels at repetere Kirchhoffs to love.

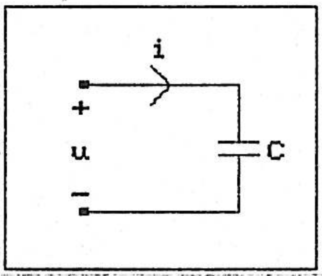
Hvis man lægger en elektrisk spænding over en af de tre grundlæggende komponenter, vil der opstå en elektrisk strøm igennem den. Eller omvendt: hvis man sender en elektrisk strøm igennem komponenten, vil der opstå en elektrisk spænding over den. Hver af de tre komponenttyper er karakteriseret ved en relation, som angiver, hvorledes spændingen og strømmen afhænger af hinanden.

Først ser vi på en modstand. Dens modstandsværdi, R, angives i enheden Ω (ohm). Modstandsværdien er bestemmende for forholdet mellem spændingen over modstanden og strømmen igennem den (ohms lov):



$$u(t) = R \cdot i(t).$$

Størrelsen, C, af en kondensator angives i enheden F (farad). Fra ellæren vides, at der hersker følgende relation mellem strømmen igennem kondensatoren og spændingen over den:

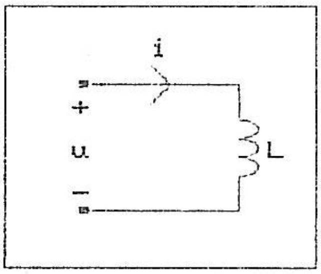


$$i(t) = C \cdot u'(t).$$

Det ses, at strømmen i en kondensator til ethvert tidspunkt er proportional med den hastighed, hvormed spændingen ændrer sig.

Hvis spændingen slet ikke ændrer sig (jævnspænding), vil strømmen være nul ampère.

Størrelsen, L, af en spole angives i enheden H (henry). Relationen mellem spændingen over spolen og strømmen igennem den er givet ved:



$$u(t) = L \cdot i'(t).$$

Man kan på mange måder opfatte spolen som et modstykke til kondensatoren. For spolens vedkommende er spændingen til ethvert tidspunkt proportional med den hastighed, hvormed strømmen ændrer sig. Hvis strømmen slet ikke ændrer sig (jævnstrøm), vil spændingen være nul volt.

Relationerne for de tre grundlæggende komponenttyper gælder uafhængigt af, hvorledes strømmene og spændingerne varierer med tiden. Specielt er relationerne gyldige for vekselspændinger og vekselstrømme.

Øvelse 1. Gennem en modstand på 470 Ω løber en vekselstrøm, som er givet ved:

$$i(t) = 0{,}03 \cdot \cos(5000t+\pi/4).$$

Find et udtryk for spændingen over modstanden.

Øvelse 2. En kondensator på 330μF (μ=micro=10^{-6}) påtrykkes en vekselspænding, som er givet ved:

$$u(t) = 1{,}5 \cdot \cos(314{,}2t).$$

Find et udtryk for strømmen i kondensatoren. Hvilken amplitude og hvilken frekvens har strømmen?

Øvelse 3. Gennem en spole på 10mH ($m=milli=10^{-3}$) løber en vekselstrøm, som er givet ved

$$i(t) = 0,15 \cdot \cos(10000t).$$

Find et udtryk for spændingen over spolen. Hvilken amplitude og hvilken frekvens har spændingen?

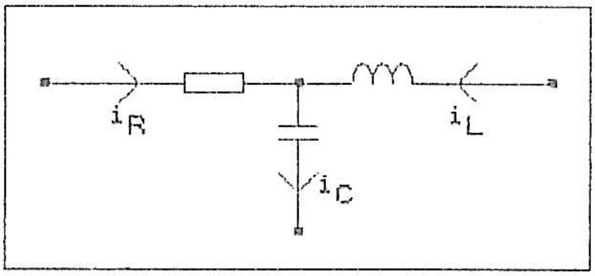
Når man går igang med at analysere et vekselstrømskredsløb, er det praktisk at forsyne diagrammet med betegnelser, som angiver vekselspændingerne og vekselstrømmene på strategisk vigtige steder. Man kalder dette at dekorere diagrammet. De små diagrammer, der er vist tidligere i dette kapitel, er eksempler på dekorerede diagrammer.

Ved angivelse af vekselspændingen mellem to punkter i et diagram, skriver man "+" ved det ene punkt og "-" ved det andet. Imellem disse to tegn skrives navnet på vekselspændingen. Denne skrivemåde er nødvendig, fordi spændingen ustandselig skifter mellem at være positiv og negativ. Det punkt, der er markeret med "+" er det, der i den positive halvperiode har det højeste elektriske potentiale.

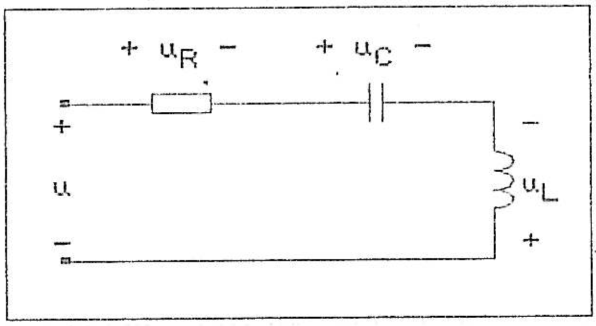
Vekselstrømmen i en ledning angives i diagrammet ved hjælp af en pil på den tilsvarende forbindelseslinie. Ved siden af pilen skrives navnet på vekselstrømmen. Pilen viser, hvilken vej strømmen løber i de halvperioder, hvori den er positiv.

Foruden relationerne for de tre grundlæggende komponenter får vi som sagt brug for Kirchhoffs to love for elektriske netværk. Disse love gælder helt generelt for vilkårlige spændinger og strømme. Derfor gælder de specielt for vekselspændinger og vekselstrømme. Lovene omtales undertiden som henholdsvis Kirchhoffs strømlov og Kirchhoffs spændingslov.

Kirchhoffs 1.lov siger, at summen af de strømme, der løber ind mod et forbindelsespunkt, er lig med summen af de strømme, der løber bort fra punktet. For de strømme, der er vist på hosstående tegning, gælder således, at $i_R+i_L=i_C$.

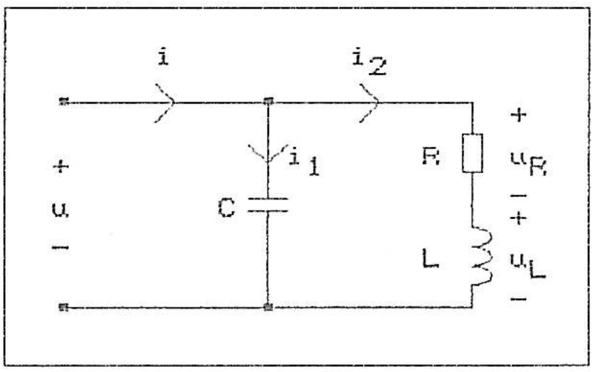


Kirchhoffs 2.lov siger, at den samlede spændingsforskel over en serieforbindelse i et kredsløb er lig med summen af de enkelte spændingsforskelle. For spændingerne på hosstående tegning gælder således, at $u=u_R+u_C-u_L$. Bemærk, at spændingerne skal regnes med fortegn.



Ved anvendelse Kirchhoffs to love, samt relationerne for modstande, kondensatorer og spoler, er man i princippet i stand til at analysere alle passive vekselstrømskredsløb. I praksis er sandheden imidlertid en ganske anden. Det følgende eksempel viser, at selv med et forholdsvis lille kredsløb kan man støde ind i store beregningsmæssige problemer.

Eksempel 1. I hosstående diagram symboliserer u en vekselspænding, som påtrykkes kredsløbet udefra. Strømmen, i, er den resulterende strøm ind i kredsløbet. Vi skal finde ud af, hvilken relation, der hersker mellem u og i. Da spændingen over kondensatoren er u, og da strømmen igennem den er i_1, har vi:



$$i_1 = Cu'.$$

Ved anvendelse af dette, samt Kirchhoffs 1.lov, fås et udtryk for i_2:

$$
\begin{aligned}
& i = i_1+i_2 \\
\Rightarrow\ & i_2 = i-i_1 \\
\Rightarrow\ & i_2 = i-Cu'.
\end{aligned}
$$

Strømmen, i_2, løber gennem modstanden. Derfor er:

$$u_R = Ri_2 = R(i-Cu');$$

men i_2 løber også gennem spolen, således at:

$$u_L = Li_2' = L(i-Cu')' = L(i'-Cu'').$$

Ifølge Kirchhoffs 2.lov gælder derfor:

$$
\begin{aligned}
& u = u_R+u_L \\
\Rightarrow\ & u = R(i-Cu')+L(i'-Cu'') \\
\Rightarrow\ & u = Ri-RCu'+Li'-LCu'' \\
\Rightarrow\ & LCu''+RCu'+u = Li'+Ri.
\end{aligned}
$$

Hermed er den søgte relation fundet. Det ses, at der er tale om en differentialligning af anden grad. Lad os for eksemplets skyld antage, at vi kender udtrykket for i:

$$i(t) = I\cos(\omega t+\phi).$$

Så er

$$i'(t) = -\omega I\sin(\omega t+\phi).$$

Når dette indsættes i differentialligningen, får vi:

$$LCu''(t)+RCu'(t)+u(t) = -\omega LI\sin(\omega t+\phi)+RI\cos(\omega t+\phi).$$

Spændingen er altså en løsning til en 2.ordens differentialligning.

Generelt gælder, at hvis man vil analysere et vekselstrømskredsløb, hvori det samlede antal af kondensatorer og spoler er n, så må man være indstillet på at skulle løse en eller flere differentialligninger af n'te grad. Hvis man for eksempel vil analysere et kredsløb bestående af en modstand, tre kondensatorer og to spoler, hvilket ikke er ualmindeligt, må man være indstillet på at skulle løse en differentialligning af 5.grad. Dette er næsten uoverkommeligt. Derfor har man i tidens løb forsket meget i alternative beregningsmetoder. I de følgende kapitler skal vi se, hvorledes de komplekse tal gør det muligt helt at undgå differentialligningerne.

KOMPLEKSE VEKSELSPÆNDINGER OG -STRØMME

Når man skriver en reel vekselspænding på formen

$$u(t) = U\cos(\omega t+\varphi),$$

med $U>0$ og $\omega>0$, har man et matematisk udtryk for en virkelig, fysisk spænding. Grafen for u er i nøje overensstemmelse med det billede, man får frem på et oscilloscop, når spændingen tilføres oscilloscopets y-indgang. Derfor kan man let føle sig overbevist om, at udtrykket er den bedst mulige matematiske model af den fysiske vekselspænding.

Imidlertid kunne det være, at vekselspændingen er mere hemmelighedsfuld end som så. Man kan forestille sig, at det, man oplever af vekselspændingen, kun er en éndimensional projektion af en todimensional kompleks vekselspænding, som man blot ikke har sanser til at registrere i fuldt omfang. Det kan med andre ord være, at den fysiske vekselspænding kun er realdelen af en kompleks vekselspænding, hvis imaginærdel hidtil har været ukendt.

Faktisk viser det sig, at hvis man leger videre med denne tanke, kommer man frem til en ny matematisk model, som er langt mere hensigtsmæssig end den gamle. Det betyder ikke, at vi hidtil har haft en forkert erkendelse af vekselspændingernes natur, men blot at den matematiske beskrivelse ikke har været den bedst mulige. Vi laver ikke om på den fysiske verden ved at indføre nye skrivemåder. De fysiske vekselspændinger og -strømme er ganske de samme, som de var tidligere.

Af gode grunde kan vi ikke vide, hvordan vekselspændingens eventuelle imaginærdel ser ud, og intet fysisk forsøg vil kunne hjælpe os til en erkendelse af den. Men vi kan lade os lede af hensynet til den beregningsmæssige brugervenlighed. Herunder tænkes også på, at Kirchhoffs love samt relationerne for modstande, kondensatorer og spoler stadig bør være gyldige.

Vekselspændingens funktionsforskrift bliver særlig simpel, hvis vi antager, at dens imaginærdel er $U\sin(\omega t+\phi)$; thi så kan vekselspændingen omskrives således:

$$\begin{aligned} u(t) &= U\cos(\omega t+\phi)+jU\sin(\omega t+\phi) \\ &= U(\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)) \\ &= Ue^{j(\omega t+\phi)}. \end{aligned}$$

Dette valg af imaginærdel har ydorligere den fordel, at u fortsat er periodisk, og at perioden er den samme som perioden for den tilsvarende reelle vekselspænding. Det skyldes, at såvel $\cos(\omega t+\phi)$ som $\sin(\omega t+\phi)$ er periodisk med perioden $T=2\pi/\omega$.

Altså definerer vi, at en <u>kompleks vekselspænding</u> er en kompleks funktion med en forskrift af formen:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor U, ω og ϕ er reelle konstanter med $U\geq 0$ og $\omega>0$. Enheden for $u(t)$ og U er volt.

Tilsvarende definerer vi, at en <u>kompleks vekselstrøm</u> er en kompleks funktion med en forskrift af formen:

$$i(t) = Ie^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor I, ω og ϕ er reelle konstanter med $I\geq 0$ og $\omega>0$. Enheden for $i(t)$ og I er ampère.

Som tilfældet var med reelle vekselspændinger og -strømme, kan man definere begreberne <u>periode</u>, <u>frekvens</u>, <u>vinkelfrekvens</u>, <u>amplitude</u>, <u>øjebliksfase</u>, og <u>begyndelsesfase</u> for komplekse vekselspændinger og -strømme. Disse størrelser er reelle og angives i de samme enheder som hidtil, og:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

<u>Øvelse 1.</u> Lad u være en vekselspænding med amplituden 5 volt, frekvensen 50 Hz og begyndelsesfasen 0 radianer. Opskriv udtrykkene for u på henholdsvis reel og kompleks form.

<u>Sætning 1.</u> Lad u være en kompleks vekselspænding. Så er Mod(u(t)) konstant lig med vekselspændingens amplitude, og Arg(u(t)) er lig med vekselspændingens øjebliksfase. De tilsvarende egenskaber for modulus og argument af en kompleks vekselstrøm er også gældende.

<u>Bevis:</u> Antag, at vekselspændingen, u, har forskriften:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor U, ω og ϕ er reelle, og $U>0$, og $\omega>0$. Så er Mod(u(t)) bestemt ved:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(u(t)) &= \mathrm{Mod}(Ue^{j(\omega t+\phi)})\\ &= \mathrm{Mod}(U)\mathrm{Mod}(e^{j(\omega t+\phi)})\\ &= U\cdot 1\\ &= U.\end{aligned}$$

Dette viser, at Mod(u(t)) er konstant lig med vekselspændingens amplitude. Herefter udregnes Arg(u(t)):

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(u(t)) &= \mathrm{Arg}(Ue^{j(\omega t+\phi)})\\ &= \mathrm{Arg}(U)+\mathrm{Arg}(e^{j(\omega t+\phi)})\\ &= 0+\omega t+\phi\\ &= \omega t+\phi.\end{aligned}$$

Det ses, at Arg(u(t)) er lig med vekselspændingens øjeblikfase. Derfor er sætningen rigtig for komplekse vekselspændinger. På samme måde kan man bevise, at sætningen er rigtig for komplekse vekselstrømme.

Øvelse 2. Lad u være en kompleks vekselspænding. Når t gennemløber R, vil u(t) gennemløbe en bane i den komplekse talplan. Giv en beskrivelse af denne bane.

Sætning 2. Lad k være en kompleks konstant. Hvis u er en kompleks vekselspænding, så er ku også en kompleks vekselspænding. En tilsvarende egenskab gælder for komplekse vekselstrømme.

Bevis: Når u er en kompleks vekselspænding, har u en forskrift af formen:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor $U\in R$, $\omega\in R$, $\phi\in R$, $U>0$ og $\omega>0$. Vi skal blot vise, at ku har en forskrift af samme form:

$$\begin{aligned} ku(t) &= kUe^{j(\omega t+\phi)} \\ &= \mathrm{Mod}(k)e^{j\mathrm{Arg}(k)}Ue^{j(\omega t+\phi)} \\ &= \mathrm{Mod}(k)Ue^{j\mathrm{Arg}(k)+j(\omega t+\phi)} \\ &= \mathrm{Mod}(k)Ue^{j(\omega t+\phi+\mathrm{Arg}(k))}. \end{aligned}$$

Da $\mathrm{Mod}(k)U\in R$, $\omega\in R$, $\phi+\mathrm{Arg}(k)\in R$, $\mathrm{Mod}(k)U>0$ og $\omega>0$, har ku den ønskede form. Dette viser, at sætningen er rigtig for komplekse vekselspændinger. I tilfældet med komplekse vekselstrømme bevises sætningen på analog måde.

Sætning 3. Hvis u og v er to komplekse vekselspændinger med samme frekvens, så er u+v også en kompleks vekselspænding. En tilsvarende egenskab gælder for komplekse vekselstrømme.

Bevis: Da u og v har samme frekvens, har de også samme vinkelfrekvens. Denne fælles vinkelfrekvens kaldes ω. Så har u og v forskrifter af formen:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)} \quad \text{og} \quad v(t) = Ve^{j(\omega t+\psi)},$$

hvor U, V, ω, ϕ og ψ er reelle, og $U\geq 0$, $V\geq 0$, og $\omega>0$. Forskriften for u+v er da:

$$\begin{aligned}(u+v)(t) &= u(t)+v(t)\\ &= Ue^{j(\omega t+\phi)}+Ve^{j(\omega t+\psi)}\\ &= Ue^{j\omega t}e^{j\phi}+Ve^{j\omega t}e^{j\psi}\\ &= (Ue^{j\phi}+Ve^{j\psi})e^{j\omega t}.\end{aligned}$$

Da tallet i parentesen er en kompleks konstant, og da funktionen $e^{j\omega t}$ er en kompleks vekselspænding (med amplituden 1 volt, og begyndelsesfasen 0 radianer), følger det af sætning 2, at u+v er en kompleks vekselspænding. Hermed er den ene halvdel af sætningen bevist. Den anden halvdel bevises på en ganske tilsvarende måde.

Øvelse 3. Lad u være den komplekse vekselspænding, der har forskriften:

$$u(t) = (9-5j)e^{j(100\pi t+2)}.$$

Find funktionsudtrykkene for funktionerne Mod(u) og Arg(u). Benyt derefter disse resultater til at skrive funktionsudtrykket for u på standardformen:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor U, ω og ϕ er reelle, og $U\geq 0$, og $\omega>0$.

<u>Øvelse 4.</u> Omskriv vekselspændingen:

$$u(t) = 4e^{j(700t+2)}+5e^{j(700t+3)},$$

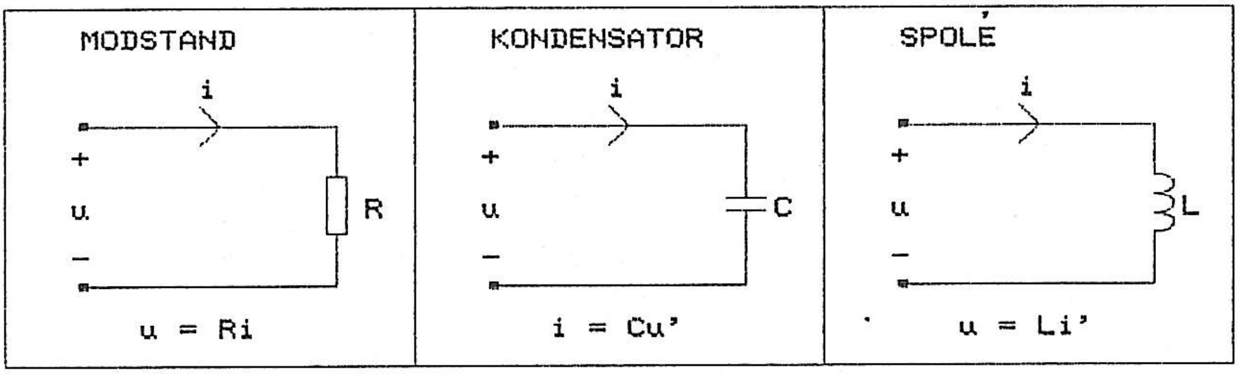
til standardformen:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)},$$

hvor U, ω og ϕ er reelle, og $U \geq 0$, og $\omega > 0$. (Hint: Brug først teknikken fra beviset for sætning 3, og derefter teknikken fra beviset for sætning 2).

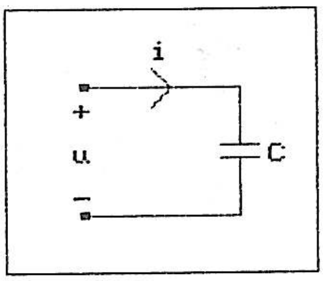
KOMPLEKSE VEKSELSTRØMSKREDSLØB

I kapitlet om reelle vekselstrømskredsløb så vi på de relationer, der beskriver sammenhængen mellem spændingen over og strømmen igennem modstande, kondensatorer og spoler:



Disse relationer er som nævnt gyldige for reelle vekselspændinger og -strømme. Nu kunne det være rart at arrangere et lille fysisk forsøg, som kunne fortælle os, om relationerne også er gyldige for komplekse vekselspændinger og -strømme. Men det lader sig desværre ikke gøre, fordi komplekse vekselspændinger og -strømme ikke er fysiske fænomener. De eksisterer kun i form af matematiske skrivemåder. Den eneste måde, hvorpå man kan afgøre, om relationerne er gyldige for komplekse vekselspændinger og -strømme, er, at undersøge, om de fører til korrekte resultater, når spændingerne og strømmene skrives på kompleks form.

Lad os starte med at se på en kondensator på C farad. Vi vil gå ud fra, at spændingen, u, over kondensatoren er en kendt fysisk vekselspænding med amplituden U, vinkelfrekvensen ω og begyndelsesfasen ϕ. Ud fra disse oplysninger beregner vi strømmen, i, gennem kondensatoren på to forskellige måder.



Først opfatter vi u som en reel vekselspænding. I dette tilfælde véd vi, at strømmen kan beregnes således:

$$\begin{aligned} i(t) &= Cu'(t) \\ &= C(U\cos(\omega t+\phi))' \\ &= -\omega CU\sin(\omega t+\phi) \\ &= \omega CU\cos(\omega t+\phi+\pi/2). \end{aligned}$$

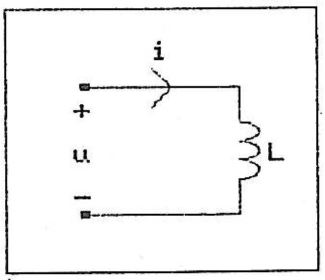
Heraf ses, at strømmen gennem kondensatoren har amplituden ωCU, vinkelfrekvensen ω og begyndelsesfasen $\phi+\pi/2$.

Dernæst opfatter vi u som en kompleks vekselspænding. Så véd vi ikke, om relationen for en kondensator gælder, men hvis vi prøver at bruge den, får vi:

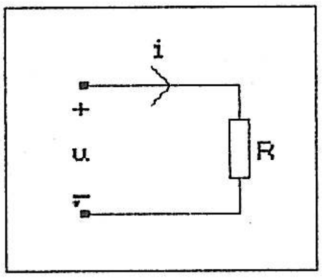
$$\begin{aligned} i(t) &= Cu'(t) \\ &= C(Ue^{j(\omega t+\phi)})' \\ &= j\omega CUe^{j(\omega t+\phi)} \\ &= e^{j\pi/2}\omega CUe^{j(\omega t+\phi)} \\ &= \omega CUe^{j\pi/2+j(\omega t+\phi)} \\ &= \omega CUe^{j(\omega t+\phi+\pi/2)}. \end{aligned}$$

Heraf ses igen, at strømmen gennem kondensatoren har amplituden ωCU, vinkelfrekvensen ω og begyndelsesfasen $\phi+\pi/2$. Dette resultat stemmer fuldstændigt overens med det foregående. Altså er relationen for en kondensator gyldig for komplekse vekselspændinger og -strømme.

<u>Øvelse 1.</u> Bevis, at relationen for en spole er gyldig for komplekse vekselspændinger og -strømme. (Hint: Antag, at strømmen er kendt. Opfat den først som en reel vekselstrøm og beregn spændingen. Opfat dernæst strømmen som en kompleks vekselstrøm og beregn igen spændingen. Sammenlign til slut de to resultater.).



Øvelse 2. Benyt samme fremgangsmåde som i den foregående øvelse til at bevise, at relationen for en modstand (ohms lov) fører til et korrekt resultat, når den anvendes i forbindelse med komplekse vekselspændinger og -strømme.



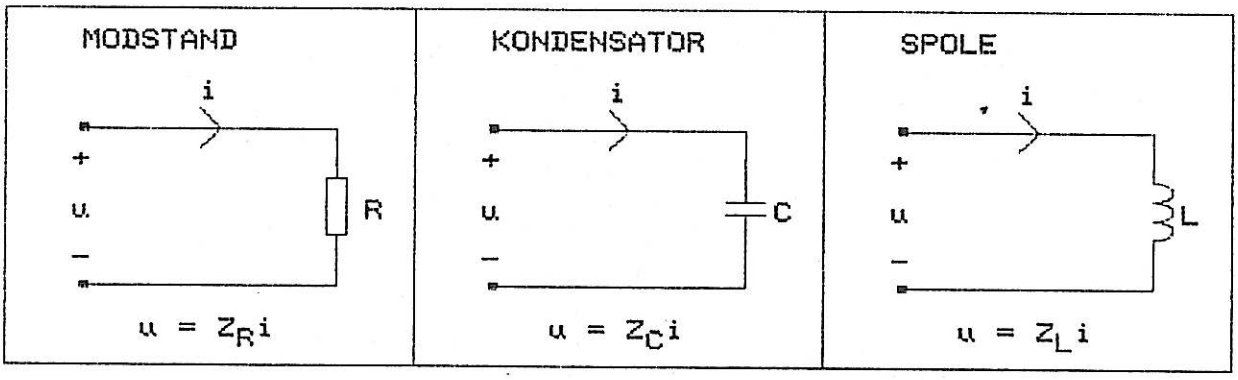
Ovenstående undersøgelser viser, at man frit kan benytte relationerne for modstande, kondensatorer og spoler, - også selvom de indgående vekselspændinger og -strømme skrives på kompleks form. På en næsten tilsvarende måde kan man eftervise, at Kirchhoffs to love fører til korrekte resultater, når de anvendes på komplekse vekselspændinger og -strømme.

Med relationerne for de tre grundlæggende komponenttyper samt Kirchhoffs love i baglommen er vi formelt rede til at analysere komplekse vekselstrømskredsløb. Men det vil hurtigt vise sig, at analyserne kommer til at ligne de reelle analyser til forveksling, og dét var jo ikke netop formålet med at indføre kompleks notation. De tilsyneladende manglende fremskridt skyldes, at vi endnu ikke har set de virkelige fordele ved komplekse vekselspændinger og -strømme.

Det fremgik af kapitlet om reelle vekselstrømskredsløb, at hvis det samlede antal af kondensatorer og spoler i et kredsløb er n, så resulterer en analyse i en differentialligning af n'te grad. Det hænger selvfølgelig sammen med, at relationerne for kondensatorer og spoler hver især indeholder en differentialkvotient. Sådan er det imidlertid ikke med ohms lov. Netop derfor er rene modstandskredsløb ret lette at analysere.

Den næste sætning viser, at når man bruger kompleks notation, får relationerne for de tre grundlæggende komponenttyper samme form som ohms lov, altså rene proportionaliteter uden differentialkvotienter.

<u>Sætning 1.</u> For komplekse vekselspændinger og -strømme med vinkelfrekvensen ω gælder følgende relationer:



hvor Z_R, Z_C og Z_L er komplekse konstanter, som er givet ved:

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad Z_L = j\omega L$$

<u>Bevis:</u> For modstandens vedkommende siger sætningen ikke noget nyt, idet der blot er tale om en lidt ændret formulering af ohms lov.

For kondensatorens vedkommende antager vi, at vekselspændingen, u, har forskriften:

$$u(t) = Ue^{j(\omega t+\phi)}.$$

Så kan strømmen, i, beregnes:

$$\begin{aligned} i(t) &= Cu'(t) \\ &= C(Ue^{j(\omega t+\phi)})' \\ &= j\omega CUe^{j(\omega t+\phi)} \\ &= j\omega Cu(t). \end{aligned}$$

heraf følger:

$$u(t) = \frac{1}{j\omega C}\, i(t) = Z_C i(t).$$

Dette er netop den ønskede relation for kondensatoren.

For spolens vedkommende antager vi, at vekselstrømmen, i, har forskriften:

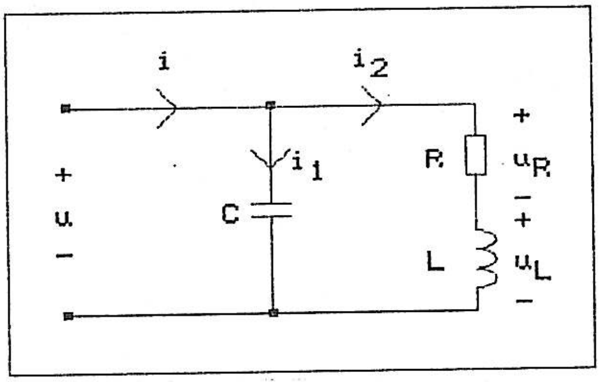
$$i(t) = Ie^{j(\omega t+\phi)}.$$

Så kan spændingen, u, beregnes:

$$\begin{aligned} u(t) &= Li'(t) \\ &= L(Ie^{j(\omega t+\phi)})' \\ &= j\omega LIe^{j(\omega t+\phi)} \\ &= j\omega Li(t) \\ &= Z_L i(t). \end{aligned}$$

Dette afslutter beviset for sætningen.

<u>Eksempel 1</u> Vi skal igen prøve at finde den relation, der beskriver sammenhængen mellem indgangsspændingen og indgangsstrømmen i det kredsløb, vi tidligere har analyseret. Men denne gang benytter vi kompleks notation. Da spændingen over kondensatoren er u, er strømmen igennem den, i_1, bestemt ved:



$$u = Z_C i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{Z_C} u$$

Derfor er, ifølge Kirchhoffs 1.lov:

$$i_2 = i - i_1 = i - \frac{1}{Z_C} u$$

Da i_2 løber gennem modstanden, fås:

$$u_R = Z_R i_2.$$

Da i_2 også løber gennem spolen, fås:

$$u_L = Z_L i_2.$$

Ved anvenselse af Kirchhoffs 2.lov fås:

$$u = u_R + u_L = Z_R i_2 + Z_L i_2 = (Z_R + Z_L) i_2$$

Heri indsættes det tidligere fundne udtryk for i_2:

$$u = (Z_R+Z_L)(i - \frac{1}{Z_C}u) = (Z_R+Z_L)i - \frac{Z_R+Z_L}{Z_C}u$$

Når u isoleres i denne ligning, fås:

$$u = \frac{Z_R+Z_L}{1 + \frac{Z_R+Z_L}{Z_C}} i$$

$$= \frac{R+j\omega L}{1+j\omega C(R+j\omega L)} i$$

$$= \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC+j\omega RC} i$$

Heraf ses, at relationen mellem u og i har formen u=Zi, hvor Z er en kompleks konstant. I stedet for, som tidligere, at ende med en differentialligning af 2.grad ser vi, at den komplekse kredsløbsanalyse fører til en ren proportionalitet mellem strøm og spænding. Dette er belønningen for at indføre den komplekse notation. Proportionalitetsfaktoren, Z, er en kompleks frekvensafhængig størrelse, som kaldes kredsløbets impedans. Impedansen indeholder al ønskelig information om, hvorledes kredsløbet reagerer på udefra kommende signaler med varierende frekvenser. I næste kapitel skal vi arbejde videre med impedansbegrebet.